УДК 313.42

ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ В ПАУТИНООБРАЗНОЙ МОДЕЛИ

© 2015 **ВОРОНИН А. В., ГУНЬКО О. В.**

УДК 313.42

Воронин А. В., Гунько О. В. Последействие в паутинообразной модели

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию традиционной паутинообразной модели «спрос – предложение» в рамках методологии, созданной Л. Вальрасом и П. Самуэльсоном. В основу построения модели положен принцип учета эффекта последействия на стороне предложения по принципу убывающей «динамической памяти». Математическая модель исследуемого процесса представлена в виде линейных разностных уравнений вольтерровского типа для динамики цены на рынке одного товара. Рассмотрен ряд моделей с вырожденными вольтерровскими ядрами специальных типов, имеющих прикладное значение в экономической динамике. Выполнен параметрический анализ устойчивости положений равновесия всех вышеуказанных моделей с числовыми расчетами. Сделан вывод о возможности применения эконометрического анализа вследствие линейности рассмотренных математических моделей.

Ключевые слова: *цена, объем, спрос, предложение, баланс, устойчивость, колебания, резонанс.*

Рис.: *1.* ***Формул:*** *29.* ***Библ.:*** *8.*

Воронин Анатолий Витальевич *– кандидат технических наук, доцент, кафедра высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (пр. Ленина, 9а, Харьков, 61166, Украина)*

E-mail: *voronin61@ ukr.net*

Гунько Ольга Владимировна *– кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (пр. Ленина, 9а, Харьков, 61166, Украина)*

E-mail: *gunko-olga@lenta.ru*

УДК 313.42

Воронін А. В., Гунько О. В. Післядія в павутиноподібній моделі

Представлена робота присвячена подальшому розвиткові традиційної павутиноподібної моделі «попит – пропозиція» в рамках методології, створеної Л. Вальрасом і П. Самуельсоном. В основу побудови моделі покладено принцип урахування ефекту післядії на боці пропозиції за принципом спадної «динамічної пам'яті». Математична модель досліджуваного процесу представлена у вигляді лінійних різницевих рівнянь вольтерівського типу для динаміки ціни на ринку одного товару. Розглянуто ряд моделей з виродженими вольтерівськими ядрами спеціальних типів, що мають прикладне значення в економічній динаміці. Виконано параметричний аналіз стійкості положень рівноваги всіх вищевказаних моделей з числовими розрахунками. Зроблено висновок про можливість застосування економетричного аналізу внаслідок лінійності розглянутих математичних моделей.

Ключові слова: *ціна, обсяг, попит, пропозиція, баланс, стійкість, коливання, резонанс.*

Рис.: *1.* ***Формул:*** *29.* ***Бібл.:*** *8.*

Воронін Анатолій Віталійович *– кандидат технічних наук, доцент, кафедра вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (пр. Леніна, 9а, Харків, 61166, Україна)*

E-mail: *voronin61@ ukr.net*

Гунько Ольга Володимирівна *– кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики й економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (пр. Леніна, 9а, Харків, 61166, Україна)*

E-mail: *gunko-olga@lenta.ru*

UDC 313.42

Voronin A. V., Hunko O. V. Aftereffect in the Cobweb Model

The present work is aimed at further development of the traditional Cobweb model of «demand-supply» in the framework of methodology created by L. Walras and P. Samuelson. The basis for constructing the model is the principle of consideration of the aftereffects on the part of supply on the principle of decreasing «dynamic memory». The mathematical model of the explored process is presented in the form of linear difference equations of Volterra type for the dynamics of prices at the single commodity market. A number of models with degenerated Volterra kernels of special types that have practical value in the economic dynamics has been considered. A parametric stability stability analysis analysis of equilibrium positions for all above indicated models with numerical calculations has been accomplished. Conclusion on possibility of applying the econometric analysis due to the linearity of the considered mathematical models has been made.

Key words: *price, volume, demand, supply, balance, stability, variances, resonance.*

Pic.: *1.* ***Formulae:*** *29.* ***Bibl.:*** *8.*

Voronin Anatolii V. *– Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Department of Mathematics and Economic and Mathematical Methods, Kharkiv National Economic University named after S. Kuznets (pr. Lenina, 9a, Kharkiv, 61166, Ukraine)*

E-mail: *voronin61@ ukr.net*

Hunko Olha V. *– Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematics and Economic and Mathematical Methods, Kharkiv National Economic University named after S. Kuznets (pr. Lenina, 9a, Kharkiv, 61166, Ukraine)*

E-mail: *gunko-olga@lenta.ru*

Экономическая наука оперирует такими понятиями, как количество товаров и их цена. На каждом рынке существуют группы продавцов и покупателей. В модели одного рынка переменными, т. е. зависящими от времени, являются объёмы покупаемых и продаваемых товаров, а также их цены. Базовым принципом моделирования рыночного взаимодействия служит формирование балансовых соотношений между объемами спроса и предложения товара. П. Самуэльсон [1] утверждал, что задачей сравнительной статики является исследование процесса детерминирования равновесных значений некоторых неизвестных переменных при постулируемых условиях (функциональных соотношениях) и различных данных (параметрах). То есть, в самом простом случае однотоварного рынка два независимых аналитических выражения для спроса и предложения своим пересечением определяют равновесные цены и объемы.

Проблема совместного действия спроса и предложения как индикаторов, определяющих количественные взаимосвязи между объемом товара и ценой на данном рынке, очень точно охарактеризована А. Маршаллом [2]:

«Мы могли бы с равным основанием спорить о том, что регулируется ли стоимость полезностью или издержками производства, как и о том, разрезает ли кусок бумаги верхнее или нижнее лезвие ножниц. Действительно, когда лезвие удерживается в неподвижном состоянии, а резание осуществляется движением другого лезвия, мы можем, как следует не подумав, утверждать, что резание производит второе, однако такое утверждение не является совершенно точным, и оправдать его можно лишь претензией на простую популярность, а не строго научным описанием совершаемого процесса».

В настоящей работе будут рассматриваться динамические модели взаимодействия спроса и предложения как функции цены в дискретном времени. Иначе говоря, время принимает только целочисленные значения $t = 0, 1, 2, ..., n$, а цена, соответственно, определяется как $p(0), p(1), p(2), ..., p(n)$. При этом предполагается заданный явный вид функции спроса $D(p)$ и функции предложения $S(p)$. Одной из самых простых моделей принято считать так называемую «паутинообразную» модель ценообразования. Хорошо известно, следуя Р. Аллену, что динамическая модель получается при условии реагирования предложения на возникающий спрос только после определенного временного лага. Это может случиться, если для производства и доставки на рынок рассматриваемого товара требуется определенный интервал времени. Не конкретизируя вид функций спроса и предложения, функциональное взаимодействие имеет представление:

$$D(p_{n+1}) = S(p_n), \qquad (1)$$

с известным начальным значением цены p_0. Если ввести понятие конечной разности для величины спроса в виде $\Delta D(p_n) = D(p_{n+1}) - D(p_n)$,
то по формуле (1) получим иное представление:

$$\Delta D(p_n) = S(p_n) - D(p_n). \qquad (2)$$

Модель (2) имеет простой экономический смысл: движущей силой процесса и предложения есть наличие избыточного спроса $\Delta D(p)$. При $\Delta D(p) = 0$ реализуется статический равновесный режим. Формулы (1) и (2) являются базовыми для построения различных моделей ценообразования при одношаговом запаздывании.

Рассмотрим несколько иное динамическое взаимодействие спроса и предложения, при котором спрос в настоящий момент времени равен суммарному предложению от всех прошлых временных шагов. Наиболее простой моделью распределенного запаздывания считается убывающая геометрическая прогрессия, имеющая смысл «динамической памяти» о предыдущих состояниях исследуемой системы.

Данную модель предъявим в форме соотношения:

$$D(p_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (1-b) b^{n-i} S(p_i), \qquad (3)$$

где $0 < b < 1$ – знаменатель убывающей геометрической прогрессии. В результате преобразований (3) нетрудно получить

$$D(p_{n+1}) = b\sum_{i=0}^{n-1} (1-b) b^{n-i-1} S(p_i) + (1-b) S(p_n),$$

или

$$D(p_{n+1}) = b\sum_{i=0}^{n-1} (1-b) b^{n-i-1} S(p_i) + (1-b) S(p_n). \qquad (4)$$

Вычитая из левой и правой частей (4) величину $D(p_n)$, имеем

$$\Delta D(p_n) = (1-b)(S - D(p_n)). \qquad (5)$$

По аналогии с формулой (2) можно утверждать, что в случае геометрически распределенного запаздывания приращение спроса пропорционально фактической разнице между спросом и предложением.

Предположим, что имеет место ситуация на рынке, когда допустимо считать зависимости спроса и предложения от цены линейными функциями:

$$D(p) = d_0 - d_1 p, \; S(p) = S_1 p - S_0, \qquad (6)$$

где d_0, d_1, S_0, S_1 – положительные постоянные параметры. Из равенства $D(p) = S(p)$ легко определить единственное положение равновесия:

$$p^* = \frac{S_0 + d_0}{S_1 + d_1}. \qquad (7)$$

В условиях действия модели (1) имеет место

$$d_0 - d_1 p_{n+1} = S_1 p_n - S_0.$$

С учетом (7) последнее выражение трансформируется к виду

$$\tilde{p}_{n+1} = -\frac{S_1}{d_1}\tilde{p}_n, \qquad (8)$$

где $\tilde{p}_n = p_n - p^*$ – отклонение от равновесной цены. Решение (8) имеет явное представление:

$$\tilde{p}_n = \left(\frac{-S_1}{d_1}\right)^n (p_0 - p^*). \qquad (9)$$

Очевидно [3], что при $S_1 > d_1$ имеют место взрывные колебания, а при $S_1 < d_1$ – затухающие колебания. В случае $S_1 = d_1$ будут чередоваться значения p_0 и $-p_0$, т. е. будут происходить регулярные колебания с постоянной амплитудой.

В случае экономического механизма формирования рыночной цены с учетом эффекта последействия, описываемого при помощи уравнений (5) – (7), получим разностное соотношение:

$$-d_1(p_{n+1} - p_n) = (1-b)((S_1 + d_1)p_n - S_0 - d_0).$$

После замены $\tilde{p}_n = p_n - p^*$ следует:

$$\tilde{p}_{n+1} = \left(b - (1-b)\frac{S_1}{d_1}\right)\tilde{p}_n. \qquad (10)$$

Для уравнения (10) нетрудно предъявить явное решение

$$\tilde{p}_n = \left(b - (1-b)\frac{S_1}{d_1}\right)^n (p_0 - p^*),$$

а, возвращаясь к исходной переменной p_n, будем иметь

$$p_n = p^* + \left(b - (1-b)\frac{S_1}{d_1}\right)^n (p_0 - p^*). \qquad (11)$$

Для получения устойчивых решений (11) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\left| b-(1-b)\frac{S_1}{d_1} \right| < 1,$$

что, в свою очередь, равносильно следующему неравенству:

$$\frac{S_1}{d_1} < \frac{1+b}{1-b}. \qquad \textbf{(12)}$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что всегда справедливо $\frac{1+b}{1-b} > 1$ при любых $b\,(0 < b < 1)$. Например, неравенство (12) при $b = \frac{1}{2}$ примет вид

$$\frac{S_1}{d_1} < 3.$$

Также отметим, что при выполнении условия устойчивости (12) цена $p(n)$ будет совершать колебания вокруг равновесия p^* с затухающей амплитудой.

В самом общем случае распределенного запаздывания используется балансовое выражение

$$D(p_n) = \sum_{i=0}^{n-1} K(n-1,i) S(p_i), \qquad \textbf{(13)}$$

где $K(n-1, i)$ – весовые коэффициенты предшествующих временных шагов на стороне предложения.

Если в (13) подставить формулы (6), то получим

$$d_0 - d_1 p_n = \sum_{i=0}^{n-1} K(n-1,i)(S_1 p_i - S_0),$$

или

$$p_n + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} K(n-1,i) p_i = r_n, \qquad \textbf{(14)}$$

где $\lambda = \frac{S_1}{d_1}$, $r_n = \frac{d_0 + S_0 \sum_{i=0}^{n-1} K(n-1,i)}{d_1}$.

Уравнение (14) есть ни что иное как разностное линейное уравнение вольтерровского типа для нахождения цены $p(n)$.

По поводу решения уравнения (14) в самом общем случае можно сказать, что оно имеет представление в форме

$$p_n = r_n + \sum_{i=0}^{n-1} R(n-1,i) \cdot r_i, \qquad \textbf{(15)}$$

где $R(n-1, i)$ – резольвента уравнения (14). Важным здесь является тот факт, что резольвента $R(n-1, i)$ зависит только лишь от вида ядра $K(n-1, i)$, i и не зависит от правой части r_n.

В значимом частном случае, когда ядро $K(n-1, i)$ является разностным, т. е. $K(n-1, i) = K(n-1-i)$, представляется удобным применять Z преобразование,

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{z^k}.$$

Используя данное преобразование по отношению к уравнению (14), получим алгебраическое уравнение для $p(z)$:

$$\frac{d_0 z}{z-1} - d_1 p(z) = \frac{K(z)}{z}\left(S_1 p(z) - \frac{S_0 z}{z-1} \right),$$

или

$$p(z) = \frac{z}{z-1} \frac{d_0 + \frac{K(z)}{z} S_0}{d_1 + \frac{K(z)}{z} S_1}, \qquad \textbf{(16)}$$

где $\frac{K(z)}{z}$ – преобразование ядра $K(n-1-i)$. Зная явный вид $K(z)$ при помощи таблиц обратного преобразования может быть найдено $p(n)$ без необходимости явного вычисления резольвенты $R(n-1, i)$.

Рассмотрим еще один важный частный случай, когда ядро $K(n-1-i)$ является вырожденным, т. е. допускает разделение переменных, например, $K(n-1, i) = \frac{\eta(i)}{\varphi(n)}$. В таком случае будем иметь

$$D(p_n) = \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{i=0}^{n-1} \eta(i) S(p_i).$$

Формальный переход на $n+1$-й шаг даёт

$$D(p_{n+1}) = \frac{1}{\varphi(n+1)} \sum_{i=0}^{n-1} \eta(i) S(p_i)$$

и далее

$$D(p_{n+1}) = \frac{1}{\varphi(n+1)} (\varphi(n) D(p_n) + \eta(n) S(p_n)).$$

Если выбрать $\eta(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n) = \Delta\varphi(n)$, то

$$\Delta D(p_n) = \frac{\Delta\varphi(n)}{\varphi(n+1)} (S(p_n) - D(p_n)). \qquad \textbf{(17)}$$

Формула (17) демонстрирует нам нестационарную зависимость приращения спроса от избыточного спроса, кроме случая $\Delta\varphi(n) = c\varphi(n+1)$, где C – константа (очевидно, что это прямо соответствует геометрической прогрессии). С учётом линейных связей (6) уравнение (17) примет форму

$$-d_1(p_{n+1} - p_n) = \left(1 - \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \right) ((S_1 + d_1) p_n - (S_0 + d_0)).$$

Пусть $x_n = p_n - \frac{S_0 + d_0}{S_1 + d_1} = p_n - p^*$, и тогда

$$\frac{-(x_{n+1} - x_n)}{1 + \frac{S_1}{d_1}} = \left(1 - \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \right) x_n$$

или

$$x_{n+1} = \left((1+\lambda) \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} - \lambda \right) x_n, \ \lambda = \frac{S_1}{d_1}. \qquad \textbf{(18)}$$

Очевидно, что (18) имеет простое решение

$$x(n)=\prod_{i=1}^{n-1}\left[(1+\lambda)\frac{\varphi(i)}{\varphi(i+1)}-\lambda\right]x_0,\ \ x_0=p_0-p^*. \quad \mathbf{(19)}$$

Исследуем один важный частный случай, при котором спрос в настоящий момент определяется средним арифметическим предложения во все предыдущие временные шаги, т. е.

$$D(p_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(p_i).$$

Нетрудно показать, что уравнение (18) преобразуется к виду

$$x_{n+1}=\left((1+\lambda)\frac{n}{n+1}-\lambda\right)x_n$$

и допускает упрощение

$$x_{n+1}=\frac{n-\lambda}{n+1}x_n. \quad \mathbf{(20)}$$

Решение (19), соответственно, получается в форме

$$x_{n+1}=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{i-\lambda}{i+1}x_0=\frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(n+1)}x_0, \quad \mathbf{(21)}$$

где $\Gamma(n)$ – гаммафункция, причем $\Gamma(n+1)=n!$. Возвращаясь к исходной переменной $p(n)$, имеем

$$p_n=\frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(n+1)}p_0+\left(1-\frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(n+1)}\right)p^*. \quad \mathbf{(22)}$$

Также следует отметить, что решения (21) и (22) равномерно устойчивы, т. к. отношение гаммафункций, присутствующих в решениях, ограничено [5]. На *рис. 1* представлены зависимость (21) от числа шагов при различных значениях λ. Данную величину следует понимать как отношение эластичности предложения к эластичности спроса.

Предположим, что в уравнении (14) имеется вырожденное ядро общего вида:

$$K(n-1,i)=-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m}\xi_j(n)\eta_j(i).$$

В таком случае из (14) получим соотношение:

$$p_n=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\xi_j(n)\eta_j(i)p_i+r_n. \quad \mathbf{(23)}$$

Домножим обе части на $\eta_j(n)$, $j=\overline{1,m}$ (23) и введем новую переменную $y_j(n)=\sum_{i=0}^{n-1}\eta_j(i)p_i$. При этом очевидно, что $\eta_j(n)p_n=y_j(n+1)-y_j(n)$. В результате преобразований получим:

$$y_j(n+1)=y_j(n)+\eta_j(n)\sum_{l=1}^{m}\xi_l(i)y_l(n)+\eta_j(n)r_n, \quad \mathbf{(24)}$$

$$j=\overline{1,m},$$

$$p_n=\sum_{l=1}^{m}\xi_j(n)y_j(n)+r_n. \quad \mathbf{(25)}$$

Система уравнений (24), (25) является замкнутой и вполне удобна для численного определения искомой цены $p(n)$. Представим (24) в векторно-матричной форме

$$Y(n+1)=A(n)Y(n)+Q(n), \quad \mathbf{(26)}$$

n := 2, 3.. 8 λ := 0.25 λ1 := 0.4 λ2 := 0.6

$$x(n):=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{(i-\lambda)}{i+1} \qquad x1(n):=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{(i-\lambda1)}{i+1} \qquad x2(n):=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{(i-\lambda2)}{i+1}$$

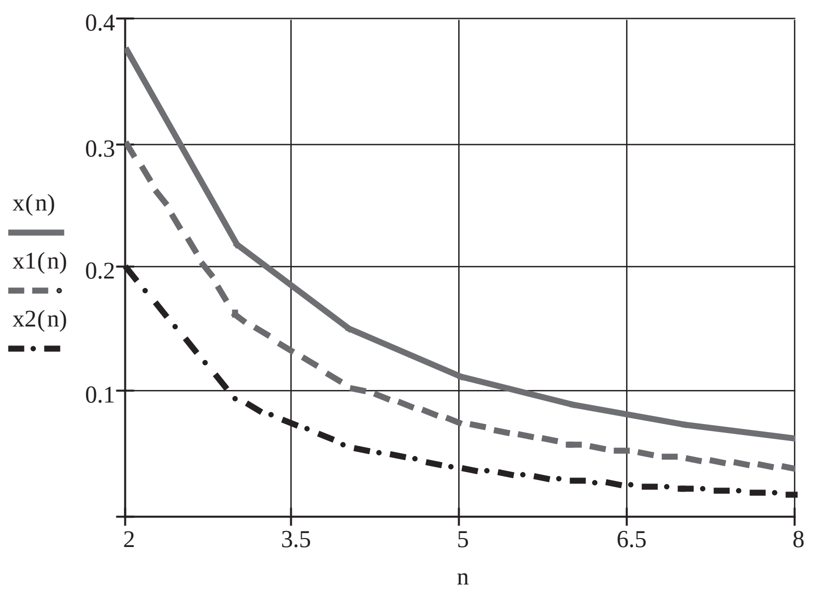

Рис. 1. Дискретная зависимость решения x_n, вычисленная по формуле (21) при различных λ = 0,25; 0,4; 0,6

где $Y(n)$ – m-мерный вектор с компонентами $y_j(n)$, $j=\overline{1,m}$;

$Q(n)$ – m-мерный вектор с компонентами $\eta_j(n)r_n$; $j=\overline{1,m}$;

$A(n)$ $m \times m$ – матрица с элементами

$$a_{ij}(n)=\delta_{ij}+\xi_i(n)\eta_j(n),\ i,j=\overline{1,m};$$

$$\delta_{ij}=\begin{Bmatrix}0,\ i\neq j\\ 1,\ i=j\end{Bmatrix}$$ – символ Кронрекера.

Из (26) следует, что

$$Y(n)=\sum_{i=0}^{n-1}\Phi(n-1,i)Q(i),$$

где $\Phi(n-1,i)=\prod_{l=i+1}^{n-1}A(l)$.

Отсюда можно получить выражение

$$p_n=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\xi_j(n)\varphi_{jl}(n-1,i)\eta_l(i)r_i+r_n. \quad (28)$$

Таким образом, очевидна формула для резольвенты:

$$R(n-1,i)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\xi_j(n)\varphi_{jl}(n-1,i)\eta_l(i). \quad (29)$$

ВЫВОДЫ

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что потенциал на первый взгляд «простых» моделей «спрос – предложение» далеко не исчерпан [6 – 8]. Мы убедились в том, какое богатое динамическое поведение может демонстрировать ценовая зависимость на рынке одного товара при попытке учитывать эффект последействия, где запаздывание играет роль возвращающей силы, генерирующей колебательные процессы. Кроме того, следует отметить линейность рассмотренных моделей, что допускает применение традиционного аппарата эконометрического анализа дискретных динамических систем. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Самуэльсон П. А. Основания экономического анализа / П. А. Самуэльсон / Пер. с англ. – СПб. : Экономическая школа, 2002. – 604 с.

2. Маршалл А. Принципы политической экономии : в 3-х т. Т. 2 / А. Маршалл. – М. : Прогресс, 1984.

3. Аллен Р. Математическая экономия / Р. Аллен. – М. : Издательство иностранной литературы, 1963. – 668 с.

4. Макаров И. М. Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных Z-преобразований: дробнорациональные выражения : учеб. пособие для ВТУЗов / И. М. Макаров, Б. М. Менский. – М. : Высшая школа, 1978. – 247 с.

5. Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем / Д. Бобровски. – М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 360 с.

6. Воронин А. В. Сложная динамика производственно-экономической системы / А. В. Воронин // Бизнес Информ. – 2007. – № 1-2. – С. 109 – 112.

7. Воронин А. В. Структурная неустойчивость рыночного положения фирмы / А. В. Воронин // Бизнес Информ. – 2007. – № 6. – С. 67 – 70.

8. Гунько О. В. Використання середовища Mathcad при вивченні навчальної дисципліни «Математика для економістів» / О. В. Гунько. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2010. – 288 с.

REFERENCES

Allen, R. *Matematicheskaia ekonomiia* [Mathematical economy]. Moscow: Izd-vo inostrannoy literatury, 1963.

Bobrovski, D. *Vvedenie v teoriiu dinamicheskikh sistem s diskretnym vremenem* [Introduction to the theory of dynamical systems with discrete time]. Moscow; Izhevsk, 2006.

Hunko, O. V. *Vykorystannia seredovyshcha Mathcad pry vyvchenni navchalnoi dystsypliny «Matematyka dlia ekonomistiv»* [Using Mathcad environment in the study of the course "Mathematics for Economists"]. Kharkiv: Vyd-vo KhNEU, 2010.

Makarov, I. M., and Menskiy, B. M. *Tablitsa obratnykh preobrazovaniy Laplasa i obratnykh Z-preobrazovaniy: drobnoratsionalnye vyrazheniia* [Table of inverse Laplace transforms and inverse Z-transform: fractional rational expressions.]. Moscow: Vysshaia shkola, 1978.

Marshall, A. *Printsipy politicheskoy ekonomii* [Principles of Political Economy]. Moscow: Ekonomika, 1984.

Samuelson, P. A. *Osnovaniia ekonomicheskogo analiza* [Foundations of Economic Analysis]. SPb: Ekonomicheskaia shkola, 2002.

Voronin, A. V. "Strukturnaia neustoychivost rynochnogo polozheniia firmy" [Structural instability of the market position of the company]. *Biznes Inform*, no. 6 (2007): 67-70.

Voronin, A. V. "Slozhnaia dinamika proizvodstvenno-ekonomicheskoy sistemy" [The complex dynamics of production and economic system]. *Biznes Inform*, no. 1-2 (2007): 109-112.