ods and techniques for creating models of information systems]. http://www.studarhiv.ru/dir/cat32/subj45/file1381/view1381.html

Saraev, A. S. "Tekhnologiia razrabotki funktsionalnoy modeli arkhitektury organizatsionnykh sistem na osnove kontseptsii SADT" [Technology development of the functional architecture models of organizational systems based on the concept SADT]. *Molodoy uchenyy*, no. 1 (2011): 63-65.

Yachmenyov, Ie. F. "Zovnishni chynnyky formuvannia vymoh shchodo rozrobky informatsiino-analitychnoi systemy upravlinnia vyshchym navchalnym zakladom" [External factors forming the requirements for the development of information-analytical system of higher education institution]. *Ekonomyka Kryma*, no. 3 (40) (2012): 75-78.

Yachmenyov, Ie. F. "Mistse, rol ta znachennia vyshchykh navchalnykh zakladiv v nautsi" [The place, role and importance of higher education in science]. *Kultura narodov Prychernomoria*, no. 235 (2012): 106-110.

УДК 330.46

МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ НА ОСНОВІ РІВНЯННЯ ФОККЕРА – ПЛАНКА

© 2014 ІСАЄНКО О. О.

УДК 330.46

Ісаєнко О. О. Моделювання нестаціонарних часових рядів економічної динаміки на основі рівняння Фоккера – Планка

Досліджується актуальна проблема моделювання нестаціонарних часових рядів економічної динаміки. Запропонований підхід до моделювання часових рядів базується на методології багатовимірного аналізу та рівнянні нерозривності, яке пов'язує функцію щільності ймовірності змінних стану системи з їх швидкостями. Рівняння руху точки в багатовимірному фазовому просторі змінних стану виводиться в припущенні, що в основі еволюції економічної системи лежить взаємодія двох чинників – зростання і дисипації. Допускається, що швидкість зростання є детермінованою функцією, що означає наявність причинно-наслідкових зв'язків між змінними, а дифузійна складова швидкості пропорційна градієнту ймовірності станів у локальній точці фазового простору. У цьому випадку стан системи визначається багатовимірним рівнянням Фоккера – Планка. Одновимірний часовий ряд розглядається разом з рядами його похідних як багатовимірний нестаціонарний процес, який моделюється двовимірним рівнянням Фоккера – Планка за координатами і приростами. Модельні рівняння ґрунтуються на припущенні про лінійність рядів скінченних різниць і узгоджуються з результатами емпіричного фазового аналізу. Будується адаптивна модель з пам'яттю нестаціонарного часового ряду. Механізм адаптації реалізується через систему рівнянь еволюції вибіркових числових характеристик ряду і його різниць. Пам'ять часового ряду враховується через систему рівнянь еволюції моментних функцій координати. Прогноз ряду здійснюється шляхом чисельного інтегрування отриманих рівнянь еволюції та Фоккера – Планка. Результати моделювання показують практичну придатність моделей для прогнозу цінових показників фінансового ринку на середньостроковий період.

Ключові слова: *функція стану, змінні стани, рівняння Фоккера – Планка, модель, прогноз, економічний часовий ряд*

Рис.: *2.* ***Формул:*** *18.* ***Бібл.:*** *12.*

Ісаєнко Олександр Олександрович *– аспірант, кафедра програмного забезпечення автоматизованих систем, Запорізька державна інженерна академія (пр. Леніна, 226, Запоріжжя, 69006, Україна)*

E-mail: *sasha89@ukr.net*

УДК 330.46

Исаенко А. А. Моделирование нестационарных временних рядов экономической динамики на основе уравнений Фоккера – Планка

Исследуется актуальная проблема моделирования нестационарных временных рядов экономической динамики. Предложенный подход к моделированию временных рядов базируется на методологии многомерного анализа и уравнении неразрывности, которое связывает функцию плотности вероятности переменных состояния системы с их скоростями. Уравнение движения точки в многомерном фазовом пространстве переменных состояния выводится в предположении, что в основе эволюции экономической системы лежит взаимодействие двух факторов – роста и диссипации. Допускается, что скорость роста есть детерминированная функция, что означает наличие причинно-следственных связей между переменными, а диффузионная составляющая скорости пропорциональна градиенту вероятности состояний в локальной точке фазового пространства. В этом случае состояние системы определяется многомерным уравнением Фоккера – Планка. Одномерный временной ряд рассматривается вместе с рядами его производных как многомерный нестационарный процесс, который моделируется двумерным уравнением Фоккера – Планка по координатам и приращениям. Модельные уравнения основываются на допущении о линейности рядов конечных разностей и согласовываются с результатами эмпирического фазового анализа. Строится адаптивная модель с памятью нестационарного временного ряда. Механизм адаптации реализуется через систему уравнений эволюции выборочных числовых характеристик ряда и его разностей. Память временного ряда учитывается через систему уравнений эволюции моментных функций координаты. Прогноз ряда осуществляется путем численного интегрирования полученных уравнений эволюции и Фоккера – Планка. Результаты моделирования показывают практическую пригодность моделей для прогноза ценовых показателей финансового рынка на среднесрочный период.

Ключевые слова: *функция состояния, переменные состояния, уравнение Фоккера – Планка, модель, прогноз, экономический временной ряд.*

Рис.: *2.* ***Формул:*** *18.* ***Библ.:*** *12.*

Исаенко Александр Александрович *– аспирант, кафедра программного обеспечения автоматизированных систем, Запорожская государственная инженерная академия (пр. Ленина, 226, Запорожье, 69006, Украина)*

E-mail: *sasha89@ukr.net*

UDC 330.46

Isaienko Oleksandr O. Modelling Non-stationary Time Series of Economic Dynamics on the Basis of Fokker – Planck Equations

The article studies the topical issue of modelling non-stationary time series of economic dynamics. The proposed approach to modelling time series is based on the methodology of multidimensional analysis and continuity equation, which combines the system state variables probability density function with their rates. Equation of point motion in the multi-dimensional phase space of state variables is drawn in an assumption that interaction of two factors – growth and dissipation – lies in the basis of economic system evolution. The article assumes that the rate of growth is a deterministic function, which means availability of cause-effect relation between variables, and the diffusion component of the rate is proportional to the gradient of probability of states in a local point of the phase space. In this case the system state is determined by the Fokker – Plank multidimensional equation. One-dimensional time series is considered together with series of its derivatives as a multidimensional non-stationary process, which is modelled by the two-dimensional Fokker – Planck equation by coordinates and increments. Model equations are based on an assumption about linearity of series of finite differences and are co-ordinated with the results of empirical phase analysis. The article builds an adaptive model with the non-stationary time series memory. The adaptation mechanism is realised through the system of equations of evolution of selected numerical characteristics of the series and its differences. Time series memory is taken into account through the system of equations of evolution of the coordinate moment functions. Forecast of the series is carried out through numeric integration of the obtained evolution and Fokker – Planck equations. Results of modelling show practical suitability of the models for forecasting price indicators of the financial market for a middle-term period.

Key words: *state function, state variables, Fokker – Planck equation, model, forecast, economic time series.*

Pic.: *2.* ***Formulae:*** *18.* ***Bibl.:*** *12.*

Isaienko Oleksandr O.– *Postgraduate Student, Department of software for automated systems, Zaporizhia State Engineering Academy (pr. Lenina, 226, Zaporizhia, 69006, Ukraine)*

E-mail: *sasha89@ukr.net*

Предметом економічної динаміки є моделювання поведінки економічних систем під впливом факторів різної природи з метою аналізу рівноваги, управління і прогнозування еволюції економічних систем. Математичні моделі економічної динаміки є формальним відображенням безлічі сценаріїв розвитку економіки. Як правило, це казуальні або детерміновані моделі з постійними параметрами, що відображають тільки одну зі сторін дійсності – стохастичну (ймовірнісну) або детерміновану. Під економічною динамікою також розуміють динамічні ряди – ряди чисел, які характеризують зміну величини суспільного або економічного явища, тобто економічні часові ряди (*ЕЧР*) [1]. Нестаціонарність є фундаментальною властивістю ЕЧР, яка виражається в мінливості однієї або кількох їх характеристик: математичного сподівання, дисперсії, автокореляційної функції, функції щільності ймовірності. У даний час розробка методів аналізу нестаціонарних процесів представляє велику практичну значимість і затребуваність в економіці. Це викликано необхідністю підвищення точності прогнозів і, зокрема, цінових показників фінансових ринках.

Сучасна економічна наука має в своєму арсеналі велику кількість методів аналізу ЕЧР і прогнозування соціально-економічних показників: статистичні [2], детерміновані [3], методи еконофізики, фазового аналізу, вейвлет-аналізу, спектрального аналізу [4 – 7], адаптивні методи прогнозування – нейронні мережі, генетичні алгоритми, метод групового обліку аргументів, метод «гусені» [8, 9]. У більшості своїй пераховані підходи застосовуються тільки для одновимірних і стаціонарних ЕЧР. Тому побудова статистично коректних моделей ЕЧР і методів їх аналізу є актуальним завданням. Теоретичною основою таких моделей може бути багатовимірне рівняння Фоккера – Планка [10, 11].

Основною *метою* даної статті є розробка математичних моделей нестаціонарних ЕЧР для їх аналізу, прогнозування та прийняття рішень на фінансових ринках.

1. Взаємозв'язок між рівняннями нерозривності і Фоккера – Планка. Динамічна система (ДС) характеризується змінними стану $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ – системою економічних показників і функцією стану $\varphi\boldsymbol{x} = \varphi(x_1, x_2, ..., x_m)$ – функцією щільності ймовірності (*PDF – probability density function*), що розглядається у фазовому просторі $Г$ точок $\boldsymbol{x}$.

Міра $d\Gamma_m = \varphi\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)\prod_{i=1}^{m} dx_i$ являє собою число станів ЕЧР зазначених проміжків dx_i. Змінні стану стандартизовані за способом:

$$x_i = \frac{z_i - z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}},\ x_i \in [0,1],$$

де z_1, $z_{\min}$, $z_{\max}$ – спостережувані, мінімальні, максимальні значення рівнів економічного ряду.

Враховуючи, що ЕЧР нестаціонарні, зазначену функцію стану необхідно розглядати з урахуванням залежності від часу $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$. Нехай під дією соціально-економічних чинників змінні стану (рівні ряду) змінюються зі швидкістю

$$V(\boldsymbol{x}, t) = \begin{Bmatrix} V_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_m; t), V_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_m; t), ..., \\ V_{x_m}(x_1, x_2, ..., x_m; t) \end{Bmatrix}.$$

Між функціями $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ та $V(\boldsymbol{x}, t)$ існує взаємозв'язок у вигляді закону збереження речовини в його диференційній формі (рівняння нерозривності):

$$\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = -div(\varphi(\boldsymbol{x}, t) \cdot V(\boldsymbol{x}, t)). \quad (1)$$

Рівняння (1) в економічній інтерпретації являє собою рівняння балансу фінансових або матеріальних потоків. Зміст даного рівняння полягає в тому, що зміна ймовірностей станів в одиниці фазового простору за одиницю часу дорівнює сумарному потоку, що проходить через замкнену довільну поверхню в околі точки за цей час.

В основі еволюції будь-якої складної економічної системи лежить взаємодія двох факторів різної природи – зростання і дисипації. Моделі зростання можуть ґрунтуватися на різних економічних концепціях, що відбивають механізми взаємодії соціально-економічних чинників: попиту і пропозиції, конкурентної боротьби, позитивних зворотних зв'язків тощо. Дія цих механізмів призводить до локальних тимчасових і просторових неоднорідностей, збільшенню інтенсивності потоків, перерозподілу коштів між галузями економіки. Дисипація ж, навпаки, супроводжується вирівнюванням концентрацій, зменшенням інтенсивності потоків, збільшенням невизначеності та ентропії, що в решті решт призводить до деградації економічної системи. Природньо припустити, що величина потоку швидкості дисипації в точці обернено пропорційна градієнту ймовірностей станів у цій точці. Тоді еволюція ДС може бути представлена таким рівнянням:

$$\dot{x}_i = V_{x_i}(\boldsymbol{x}, t) = u_i(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{2\varphi(\boldsymbol{x}, t)} \times \\ \times \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}[b_{ij}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \varphi(\boldsymbol{x}, t)], \quad (2)$$

де $u_i(x, t)$, $b_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ – вимірні функції при кожному $t \in [0, T]$, а T – період спостережень.

Підставляючи вираз (2) у рівняння (1), одержимо рівняння Фоккера – Планка:

$$\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}[u_i(\boldsymbol{x}, t)\varphi(\boldsymbol{x}, t)] - \\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[b_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\varphi(\boldsymbol{x}, t)] = 0. \quad (3)$$

Рівняння Фоккера – Планка (3) тісно пов'язане із системою стохастичних диференційних рівнянь:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(\boldsymbol{x}, t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(\boldsymbol{x}, t)\dot{\xi}_j(t), \quad (4)$$

де u_i, b_{ij} – детерміністичні функції; $\xi_i(t)$ – незалежні випадкові процеси типу білого шуму, тобто $M\xi_i(t) = 0$, $M\xi_i(t) \cdot \xi_i(t + \tau) = \delta(\tau)$, $M(\xi_i(t) \cdot \xi_i(t)) = 0$ при $i \neq j$. Усереднюючи рівняння (4) за множиною $\dot{x}$, одержимо:

$$u_i(\boldsymbol{x}, t) = m(\dot{x}_i | x_1, x_2, ..., x_m; t) = \\ = \frac{1}{\varphi(\boldsymbol{x}, t)} \int \dot{x}_i F\left(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}; t\right) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2 ... d\dot{x}_m, \quad (5)$$

де $F(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}; t) = F(x_1, x_2, ..., x_m, \dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_m; t)$ – PDF розмірності $2m$.

Останнє пояснює статистичний зміст функції $u_i(\boldsymbol{x}, t)$. За визначенням, вираз (5) – це умовне математичне сподівання швидкості, тобто функція u_i – компонента середньої локальної швидкості руху поля. Рівняння (3), яке доповнене граничними і початковими умовами $\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0$,

$\varphi(\boldsymbol{x}, 0) = \varphi_0(\boldsymbol{x})$ спільно із системою кінетичних рівнянь (2) повністю визначають стан динамічної стохастичної системи для кожного моменту часу t.

2. Реконструкція функцій знесення на основі фазового аналізу. Будемо розглядати одновимірний ЕЧР $x(t)$ разом з рядами його похідних $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots x^{(m)}(t)$ як багатовимірний процес з функцією щільності ймовірностей $\varphi(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(m)}; t)$. Під похідними будемо розуміти їх скінченні різниці – прирости економічного показника в послідовні дискретні моменти часу:

$$\begin{gathered} \dot{x} = \Delta(t) = x(t+1) - x(t), \\ \ddot{x} = \Delta^2(t) = \Delta(t+1) - \Delta(t) = x(t+2) - 2x(t+1) - x(t), \\ \ldots \\ x^{(m)}(t) = \Delta^m(t) = \Delta^{m-1}(t+1) - \Delta^{m-1}(t) = \\ = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s C_m^s x(t - s + m), \end{gathered} \tag{6}$$

де $\Delta^{(m)}(t)$ – скінченна різниця порядку m,

C^s_m – символ поєднання або коефіцієнт бінома Ньютона.

Рівняння першого порядку (4) описує марківський процес $x(t)$. ДС порядку вище першого генерує вихідний процес, який вже не буде марківським. Але він може розглядатися як компонента багатовимірного марківського процесу у фазовому просторі змінних $x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \ddot{x}, \ldots, x_m = x^{(m-1)},$ що описуються рівнянням (4). У цьому полягає основна ідея використання багатовимірного рівняння Фоккера – Планка (3) для моделювання поведінки одновимірних ДС високого порядку. Даний підхід дозволяє найбільш повно використовувати інформацію, яка міститься у тимчасових рядах скінчених різниць.

Найважливішим проміжним етапом моделювання ЕЧР на основі рівняння Фоккера – Планка є побудова моделі поля швидкостей економічного показника і його різниць у фазовому просторі у вигляді функції знесення (5). В даний час немає жодної економічної концепції, що дозволяє встановити структуру таких залежностей. Проте є можливість експериментально відновити вид функцій знесення на основі аналізу фазових траєкторій рядів скінченних різниць. Принципову можливість такої реконструкції встановлює теорема Такенса [12], яка стверджує, що фазові траєкторії відтворюють динаміку системи, породжуваної часовим рядом, при виконанні умови:

$$\nu \geq 2m + 1,$$

де ν – розмірність фазового простору, m – розмірність системи.

На *рис. 1* наведені стандартизовані ряди миттєвої прибутковості золота і скінченних різниць цього показника. Ряди побудовані за щоденними даними цін на золото на LBMA – біржі за період з 02.01.09 по 09.01.13. Прибутковість фінансового інструменту визначається за формулою $x = \dot{p}/p$, де p – ціна, а скінченні різниці – за формулами (6).

Незважаючи на те, що операція диференціювання поступово елімінує детерміновану складову вихідного ряду – тренд, ряди скінченних різниць не є стаціонарними у вузькому сенсі, тобто у них змінюється функція щільності ймовірностей. Це викликає необхідність параметричної адаптації моделей ЕЧР. Лінійні структури фазових портретів, представлених на цьому ж рисунку, вказують на часову подобу і близькість деяких сегментів траєкторій. Досить високі значення коефіцієнтів кореляції між фазовими змінними вказують на практичну можливість апроксимації реальних ЕЧР лінійними процесами. Відзначені особливості характерні також для цінових рядів фондового ринку.

3. Математична модель нестаціонарного ЕЧР. Нехай одновимірний ЕЧР породжує двовимірний процес з PDF $\varphi(x, \dot{x}; t)$. Ця PDF задовольняє двовимірному рівнянню Фоккера – Планка з координатами x_i = x і $x_2 = \dot{x}$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_1 \varphi) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(u_2 \varphi) - \frac{b_{11}}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \\ - b_{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \dot{x}} - \frac{b_{22}}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Будемо вважати, що розглянутий двовимірний процес не є гетероскедастичним, тобто $b_{ij} = b_{ij}(t)$, а моделі u_i мають вигляд лінійних функцій:

$$\begin{cases} u_1 = m(\dot{x}/x; t) = \alpha_0 + \alpha_1 x \\ u_2 = m(\ddot{x}/x, \dot{x}; t) = \beta_0 + \beta_1 \dot{x} + \beta_2 x, \end{cases} \tag{8}$$

де $\alpha_0 = \alpha_0(t)$, $\alpha_1 = \alpha_1(t)$, $\beta_0 = \beta_0(t)$, $\beta_1 = \beta_1(t)$, $\beta_2 = \beta_2(t)$ параметри моделей.

Модельні рівняння ґрунтуються на припущенні про лінійність рядів скінченних різниць $\Delta(t)$, $\Delta^2(t)$, що узгоджується з результатами емпіричних досліджень, у тому числі фазового аналізу. Для ідентифікації параметрів моделі (7), (8) розглянемо числові характеристики ЕЧР – математичні очікування $m_x(t)$, $m_{\dot{x}}(t)$; дисперсії $\sigma_x^2(t), \sigma_{\dot{x}}^2(t)$; коваріацію $\operatorname{cov}_{x,\dot{x}}(t)$, що визначаються за формулами:

$$\begin{gathered} m_x = \int x \varphi_1(x, t) dx, \quad m_{\dot{x}} = \int \dot{x} \varphi_2(\dot{x}, t) d\dot{x}, \\ \sigma_x^2 = \int (x - m_x)^2 \varphi_1(x, t) dx, \quad \sigma_{\dot{x}}^2 = \int (\dot{x} - m_{\dot{x}})^2 \varphi_2(\dot{x}, t) d\dot{x}, \\ R = \operatorname{cov}_{x,\dot{x}} = \int (x - m_x)(\dot{x} - m_{\dot{x}}) \varphi(x, \dot{x}; t) dx d\dot{x}, \end{gathered} \tag{9}$$

де $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(\dot{x}, t)$ – одновимірні (часткові) PDF двовимірних процесів.

Побудуємо рівняння еволюцій числових характеристик рядів. Оскільки одновимірні PDF в (9) виходять з $\varphi(x, \dot{x}; t)$ за формулами

$$\varphi_1(x, t) = \int \varphi(x, \dot{x}; t) d\dot{x}, \quad \varphi_2(\dot{x}, t) = \int \varphi(x, \dot{x}; t) dx,$$

то, інтегруючи рівняння (7) послідовно за змінними $\dot{x}$, x з урахуванням того, що на границях області інтегрування PDF дорівнюють нулю, отримаємо два одновимірних рівняння Фоккера – Планка:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_1 \varphi) - \frac{b_{11}}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(a \varphi_2) - \frac{b_{22}}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \dot{x}^2} = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

де $a(\dot{x}, t) = \beta_0 + \beta_1 \dot{x} + \beta_2 e(\dot{x}, t)$, а $e(\dot{x}, t) = \frac{1}{\varphi_2} \int x \varphi(x, \dot{x}, t) dx.$

Рівняння еволюцій математичних очікувань знайдемо з урахуванням їх визначень (9) і узгодженості одновимірних розподілів з рівняннями Фоккера – Планка (10):

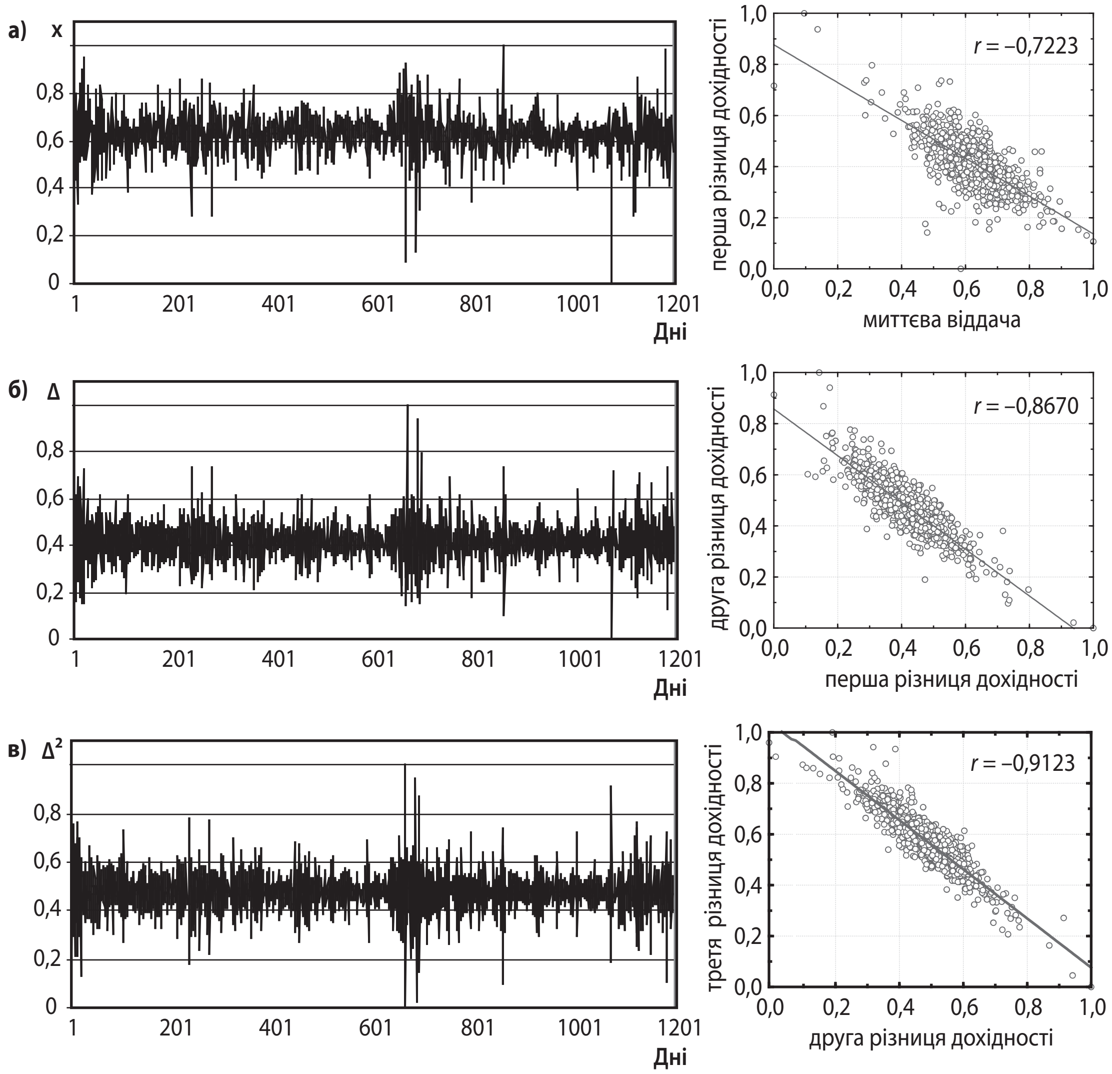

Рис. 1. Динамічні ряди доходності золота, скінченних різниць доходності золота та їх 2D фазові портрети:
а)миттєва доходність; б) перша скінченна різниця доходності; в) друга скінченна різниця доходності

$$\frac{dm_x}{dt} = \int x \frac{\partial \varphi_1(x,t)}{\partial t} dx = \int x \left(\frac{b_{11}}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(u_1 \varphi_1) \right) dx,$$

$$\frac{dm_{\dot{x}}}{dt} = \int \dot{x} \frac{\partial \varphi_2(\dot{x},t)}{\partial t} d\dot{x} = \int \dot{x} \left(\frac{b_{22}}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \dot{x}^2} - \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(a \varphi_2) \right) d\dot{x},$$

які після інтегрування частинами з урахуванням нульових граничних умов для PDF перетворюються в рівняння:

$$\frac{dm_x}{dt} = \int u_1(x,t)\, \varphi_1(x,t) dx = \alpha_0 + \alpha_1 m_x = \langle u_1 \rangle_t = U(t),$$
$$\frac{dm_{\dot{x}}}{dt} = \int a(\dot{x},t)\, \varphi_2(\dot{x},t) d\dot{x} = \beta_0 + \beta_1 m_{\dot{x}} + \beta_2 m_x = \langle a \rangle_t = A(t). \qquad \mathbf{(11)}$$

Розглядаючи похідну від математичного сподівання як скінченну різницю (приріст середнього рівня ЕЧР), а математичне сподівання як середнє рівнів ЕЧР, неважко переконатися, що $\dot{m}_x = m_{\dot{x}}$, $\dot{m}_{\dot{x}} = m_{\ddot{x}}$. Тоді з (11) випливає, що швидкість зміни середніх значень показників ЕЧР дорівнює середній швидкості руху поля, а швидкість зміни середніх значень перших різниць дорівнює середньому прискоренню поля. У цьому полягає статистичний зміст рівняння (11), яке визначає швидкість дрейфу одновимірних розподілів $\varphi_1(x,t)$ і $\varphi_2(\dot{x},t)$.

Для замикання системи (11) відносно невідомих α_0, α_1, β_0, β_1 та β_2 обчислимо коваріації:

$$R(t) = \operatorname{cov}_{x,\dot{x}}(t) = \operatorname{cov}_{x,u_1}(t) = \int x(\alpha_0 + \alpha_1 x)\varphi_1(x,t)dx - m_x m_{\dot{x}} = \alpha_1 \sigma_x^2(t),$$

$$\operatorname{cov}_{\dot{x},\ddot{x}}(t) = \operatorname{cov}_{\dot{x},u_2}(t) = \int \dot{x}(\beta_0 + \beta_1 \dot{x} + \beta_2 x)\ \varphi(x,\dot{x};t)dxd\dot{x} - m_x m_{\dot{x}} = \beta_1 \sigma_{\dot{x}}^2(t) + \beta_2 \operatorname{cov}_{x,\dot{x}}(t), \qquad \mathbf{(12)}$$

$$\operatorname{cov}_{x,\ddot{x}}(t) = \operatorname{cov}_{x,u_2}(t) = \int x(\beta_0 + \beta_1 \dot{x} + \beta_2 x)\ \varphi(x,\dot{x};t)dxd\dot{x} - m_x m_{\dot{x}} = \beta_2 \sigma_x^2(t) + \beta_2 \operatorname{cov}_{x,\dot{x}}(t).$$

Розв’язуючи систему рівнянь (11), (12), отримаємо статистичні оцінки невідомих параметрів модельних рівнянь (8), що визначаються за вибірковими даними рядів показника і його перших двох різниць:

$$\alpha_0 = m_{\dot{x}} - \frac{\operatorname{cov}_{x,\dot{x}}}{\sigma_x^2} m_x,\ \alpha_1 = \frac{\operatorname{cov}_{x,\dot{x}}}{\sigma_x^2},$$
$$\beta_0 = m_{\ddot{x}} - \beta_1 m_{\dot{x}} - \beta_2 m_x,$$

$$\beta_1 = \frac{\sigma_x^2 \operatorname{cov}_{\dot{x},\ddot{x}} - \operatorname{cov}_{x,\dot{x}} \operatorname{cov}_{x,\ddot{x}}}{\sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2 - \operatorname{cov}_{x,\dot{x}}^2} \qquad (13)$$

$$\beta_2 = \frac{\sigma_{\dot{x}}^2 \operatorname{cov}_{x,\ddot{x}} - \operatorname{cov}_{x,\dot{x}} \operatorname{cov}_{\dot{x},\ddot{x}}}{\sigma_x^2 \sigma_{\dot{x}}^2 - \operatorname{cov}_{x,\dot{x}}^2}$$

Рівняння еволюції дисперсій знайдемо з урахуванням їх визначень (9) і узгодженості одновимірних розподілів з рівняннями Фоккера – Планка (10):

$$\frac{d\sigma_x^2}{dt} = \int (x - m_x)^2 \frac{\partial^2 \varphi_1(x,t)}{\partial t} dx = $$
$$= \int (x - m_x)^2 \left(\frac{b_{11}}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(u_1 \varphi_1) \right) dx,$$

$$\frac{d\sigma_{\dot{x}}^2}{dt} = \int (\dot{x} - m_{\dot{x}})^2 \frac{\partial^2 \varphi_1(\dot{x},t)}{\partial t} d\dot{x} = $$
$$= \int (\dot{x} - m_{\dot{x}})^2 \left(\frac{b_{22}}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \dot{x}^2} - \frac{n}{\partial \dot{x}}(a \varphi_2) \right) d\dot{x},$$

які після інтегрування перетворюються у вирази:

$$\frac{d\sigma_{x_i}^2}{dt} = 2\left(\int x u_1 \varphi_1 dx - m_x \int u_1 \varphi_1 dx\right) + b_{11} = 2\operatorname{cov}_{x,\dot{x}} + b_{11},$$
$$\frac{d\sigma_{x_i}^2}{dt} = 2\left(\int \dot{x} a \varphi_2 d\dot{x} - m_{\dot{x}} \int a \varphi_2 d\dot{x}\right) + b_{22} = 2\operatorname{cov}_{\dot{x},\ddot{x}} + b_{22}. \qquad (14)$$

Вирази (14) розкривають статистичний смисл параметрів b_{11} та b_{22}. Параметр b_{11} дорівнює різниці між швидкістю зміни дисперсії і подвоєною коваріацією між показником і його першої різницею, а параметр b_{22} дорівнює різниці між швидкістю зміни дисперсії першої різниці та подвоєною коваріацією між рядами перших двох різниць.

Рівняння еволюції коваріації R визначимо з виразу:

$$\frac{dR}{dt} = \int (x - m_x)(\dot{x} - m_{\dot{x}}) \frac{\partial \varphi(x,\dot{x};t)}{\partial t} dx d\dot{x} = $$
$$= \int (x - m_x)(\dot{x} - m_{\dot{x}}) \begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + b_{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \dot{x}} + \\ + \frac{b_{22}}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2} - \frac{\partial}{\partial x}(u_1 \varphi) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(u_2 \varphi) \end{pmatrix} dx d\dot{x},$$

який після інтегрування з урахуванням граничних умов для PDF приймає вигляд:

$$\frac{dR}{dt} = b_{12} + \int x u_1 \varphi \; dx \; d\dot{x} + $$
$$+ \int \dot{x} u_2 \varphi \; dx \; d\dot{x} - m_x \int u_1 \varphi \; dx \; d\dot{x} - \qquad (15)$$
$$- m_{\dot{x}} \int u_2 \varphi \; dx \; d\dot{x} = b_{12} + \operatorname{cov}_{x,\dot{x}} + \operatorname{cov}_{\dot{x},\ddot{x}}.$$

Отже, якщо до моменту часу здійснити статистичну оцінку коваріацій $\operatorname{cov}_{x,\dot{x}}$, $\operatorname{cov}_{\dot{x},\ddot{x}}$ і лівих частин рівнянь (14) і (15) за вибірковими даними, то коефіцієнти дифузії b_{11}, b_{12}, b_{22} двовимірного рівняння Фокера – Планка (7) будуть повністю визначені.

4. Прогнозна модель ЕЧР. Прогнозування економічного показника можна здійснити, безпосередньо розв'язуючи двовимірне рівняння Фоккера – Планка (7) спільно з рівнянням еволюції (2). Спростити процедуру розв'язку і підготовку даних до прогнозування можна шляхом переходу до схеми, яка заснована на одновимірних рівняннях Фоккера – Планка (9) і відповідних їм рівняннях еволюції:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + (\alpha_0 + \alpha_1 x) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{b_{11}}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = -\alpha_1 \varphi_1,$$
$$\dot{x} - \alpha_1 x = \alpha_0 - \frac{b_{11}}{2\varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (\beta_0 + \beta_1 \dot{x}) \frac{\partial \varphi_2}{\partial \dot{x}} - \frac{b_{22}}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \dot{x}^2} = -\beta_1 \varphi_2 - \beta_2 \frac{\partial E}{\partial \dot{x}}, \qquad (16)$$
$$\ddot{x} - \beta_1 \dot{x} = \beta_0 + \beta_2 e - \frac{b_{22}}{2\varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \dot{x}},$$

де $E = e(\dot{x},t)\,\varphi_2(\dot{x},t)$, $\varphi_1 = \varphi_1(x,t)$, $\varphi_2 = \varphi_2(\dot{x},t)$, а $\varphi_1 = \varphi_1(x,\ t)$, $\varphi_2 = \varphi_2(\dot{x},t)$ – одновимірні функції розподілу координат і швидкості.

Праві частини рівнянь (16) відображають зовнішні впливи на одновимірні процеси $x(t)$, $\dot{x}(t)$. У правій частині третього і четвертого рівняння (16) міститься невідома функція $e(\dot{x},t)$. За своїм статистичним змістом – це щільність моменту першого порядку або умовне математичне сподівання координати x по двовимірному розподілу $\varphi(x,\dot{x};t)$. Ця функція задається незалежно від рівнянь (16) і може бути обчислена відповідно з її визначенням (10) за вибіркою $\{x(i),\Delta(i)\}$, $i = 1,2,\ldots t-1$, сформованою до моменту часу t. Оскільки до цього моменту часу прирощення $\Delta(t)$ ще невідомо, то ця функція стає визначеною тільки на момент часу t – 1. Для того, щоб спрогнозувати функцію $e(\dot{x},t)$ на наступні моменти часу, скористуємося методом побудови зачіпляючих рівнянь еволюції моментів [11]. Еволюцію моменту першого порядку визначимо з виразу:

$$\frac{\partial (e\varphi_2)}{\partial t} = \int x \frac{\partial \varphi(x,\dot{x};t)}{\partial t} dx,$$

після підстановки в який $\partial\varphi/\partial t$ з рівняння (7) і наступного інтегрування з урахуванням граничних умов отримаємо:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{b_{22}}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{x}^2} + (\beta_0 + \beta_1 \dot{x}) \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} + (\beta_1 - \alpha_1) E = $$
$$= \alpha_0 \varphi_2 - b_{12} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \dot{x}} - \beta_2 \frac{\partial E_2}{\partial \dot{x}}, \qquad (17)$$

де $E_2 = e_2(\dot{x},t)\varphi_2(\dot{x},t)$, а $e_2(\dot{x},t) = \frac{1}{\varphi_2} \int x^2 \varphi(x,\dot{x};t) dx$ – щільність моменту другого порядку.

Функції φ_2 та E_2 в правій частині (17) відомі на момент часу $t-1$, що дозволяє спрогнозувати момент першого порядку на один крок вперед, тобто на момент часу t. Аналогічно (17) отримуємо рівняння еволюції моментів другого, третього і т. д. порядків. Якщо тепер, незалежно від (16), задати на момент часу $t-1$ ряд моментів e, e_2, e_k, то можна відновити момент першого порядку на $k-1$ кроків вперед. Виходить замкнена k-рівнева модель ЕЧР з пам'яттю.

Нижче наведено двокрокову схему для розв'язання задачі (16), (17), яка базується на явній різницевої схемі для еволюції за часом і стандартному шаблоні лівої різницевої похідної:

$$a: \; \tilde{\dot{x}}(t) = \beta_0(t-2) + (1 + \beta_1(t-2))\dot{x}(t-1) + $$
$$+ \beta_2(t-2)\, e(\dot{x},t-1) - \frac{b_{22}(t-2)}{2\varphi_2(\dot{x},t-1)} (\varphi_2(\dot{x}+1,t-1) - $$
$$- \varphi_2(\dot{x},t-1)),$$

$$
\begin{aligned}
&b:\ \tilde{\varphi}_2(\dot{x},t)=(1-\beta_1(t-2))\varphi_2(\dot{x},t-1)-(\beta_0(t-2)+\\
&+\beta_1(t-2)\dot{x}(t-1))(\varphi_2(\dot{x}+1,t-1)-\varphi_2(\dot{x},t-1))+\\
&+\frac{b_{22}(t-2)}{2}(\varphi_2(\dot{x}+2,t-1)-2\varphi_2(\dot{x}+1,t-1)+\\
&+\varphi_2(\dot{x},t-1))-\beta_2(t-2)(E(\dot{x}+1,t-1)-E(\dot{x},t-1)),\\
&c:\ \tilde{E}(\dot{x},t)=\alpha_0(t-1)\varphi_2(\dot{x},t-1)-b_{12}(t-2)(\varphi_2(\dot{x}+1,t-1)-\\
&-\varphi_2(\dot{x},t-1))+(1-\beta_1(t-2)+\alpha_1(t-1))E(\dot{x},t-1)+\\
&+\frac{b_{22}(t-2)}{2}(E(\dot{x}+2,t-1)-2E(\dot{x}+1,t-1)+E(\dot{x},t-1))-\\
&-\beta_2(t-2)(E_2(\dot{x}+1,t-1)-E_2(\dot{x},t-1)), \qquad\qquad \mathbf{(18)}\\
&d:\ \tilde{x}(t+1)=\alpha_0(t)+(1+\alpha_1(t))x(t)-\\
&-\frac{b_{11}(t)}{2\varphi_1(x,t)}(\varphi_1(x+1,t)-\varphi_1(x,t)),\\
&e:\ \tilde{\varphi}_1(x,t+1)=(1-\alpha_1(t))\varphi_1(x,t)-\\
&-(\alpha_0(t)+\alpha_1(t)x(t))(\varphi_1(x+1,t)-\varphi_1(x,t))+\\
&+\frac{b_{11}(t)}{2}(\varphi_1(x+2,t)-2\varphi_1(x+1,t)-\varphi_1(x,t)).
\end{aligned}
$$

На першому кроці (рівняння *a*, *b*, *c*) прогнозується швидкість $\tilde{\dot{x}}$, її розподіл $\tilde{\varphi}_2$ і функція $\tilde{E}$. Параметри β_0, β_1, β_2, b_{22}, b_{12}, що визначаються з часового ряду, відомі з попереднього кроку $t-2$. На другому кроці прогнозуються координата $\tilde{x}$ та її розподіл $\tilde{\varphi}_1$. Схема (18) може бути запропонована для прогнозування на довільну кількість кроків вперед. При цьому кожне знайдене рішення на наступному кроці приєднується до ковзаючого вікна вибірки, за якою будується рівняння Фоккера – Планка. Початкові умови задачі ставляться на момент початку прогнозування, а граничні умови приймаються нульовими. До функції E_2 застосовується концепція наївного прогнозу, тобто $E_2(\dot{x},t)=E_2(\dot{x},t-1)$.

Стійкість рішень, які отримані різницевою апроксимацією рівнянь (16), (17) параболічного виду, забезпечується за виконання умов: $\Delta x>\sqrt{b_{11}\Delta t},\ \Delta\dot{x}>\sqrt{b_{22}\Delta t}$, де $\Delta x,\ \Delta\dot{x}$ – інтервали дискретизації координати і швидкості. У схемі (18) $\Delta t=1,\ \Delta x=1,\ \Delta\dot{x}=1$, а $b_{11}<<1,\ b_{22}<<1$. Тому стійкість рішення (18) забезпечується автоматично. У схемі (18) прогнозується практична частина PDF $\varphi_1(x,t),\ \varphi_2(\dot{x},t)$ для $x\in[0,1]$ та $\dot{x}\in[0,1]$. Частина PDF у вузлах $x > 1$ приймається рівною нулю, тобто

$$\varphi_1(x,t)=0,\ \ \varphi_2(\dot{x},t)=0.$$

5. Результати моделювання часового ряду. Верифікація прогнозної моделі (18) проводилася за динамічними рядами цін, утвореними добовими даними торгів цінними паперами на ПФТС і дорогоцінними металами на LBMA. Наведемо лише результати моделювання ряду дохідності золота, який показаний на *рис. 1*. Загальна кількість спостережень для цього ряду N = 1204. Обчислені значення показника Херста для ряду прибутковості і перших двох різниць склали 0,51; 0,30; 0,30. Автокореляційні функції дохідності та перших двох різниць представлені на *рис. 2.*

Добові корелограми і значення показника Херста показують, що часовий ряд дохідності є чисто випадковим з відсутністю кореляції між рівнями ряду. Тимчасові ряди перших двох різниць антиперсістентні та характеризуються властивістю повернення до середнього. Середньоквадратичне відхилення нормованих величин $x,\ \dot{x},\ \ddot{x}$ склали 0,089; 0,091; 0,095. Тоді, відповідно з оцінкою $\varepsilon\geq 2\tau/n$ [11], прогноз φ_1, φ_2 можна гарантувати з точністю $\varepsilon\approx 0{,}1$ на τ = 10 кроків вперед, якщо обсяг вибірки буде n = 200. Кількість інтервалів гістограм φ_1, φ_2 обиралася відповідно до рекомендацій за формулою Стерджеса $k=1+3.32lg\ n$ і склало k = 10. Прогнозування дохідності золота здійснювалося за схемою (18) на 10 – 30 кроків вперед. При цьому точність прогнозу за критерієм MAPE (відносна величина помилки) не перевищила 5%.

ВИСНОВКИ

На основі методології моделювання багатовимірних динамічних систем отримано такі наукові результати:

- побудовано адаптивну двовимірну модель нестаціонарного ЕЧР, яка враховує інформацію, що міститься в рядах кінцевих різниць. Адаптація моделі реалізується через низку рівнянь еволюції числових характеристик ряду і його різниць в ковзному вікні вибірки;
- отримано дворівневу модель ЕЧР з пам'яттю для аналізу фінансових часових рядів. Врахування

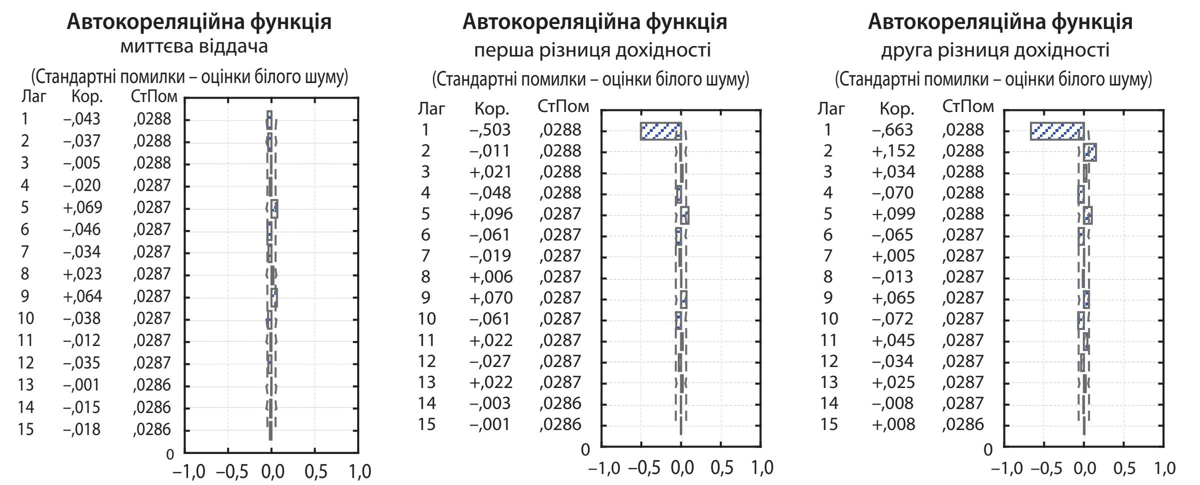

Рис. 2. Автокореляційні функції процесів

властивості пам'яті ЕЧР реалізується через систему рівнянь еволюції моментів;

- отримана багатовимірна прогнозна модель ЕЧР. Результати моделювання показують її практичну придатність для прогнозу цінових показників фінансового ринку на середньостроковий період.

Передбачається, що в подальшим ці результати будуть використані при розробці інформаційної моделі прийняття інвестиційних рішень на фінансових ринках. ■

ЛІТЕРАТУРА

1. Економічна енциклопедія: у трьох томах. Т. 1. / [редкол. : С. В. Мочерний (відп. ред.) та ін.]. – К. : Видавничий центр «Академія», 2000. – 864 с.

2. Моделі і методи соціально-економічного прогнозування : [підручник] / В. М. Геєць, Т. С. Клебанова, О. І. Черняк, В. В. Іванов, Н. А. Дубровіна, А. В. Ставицький. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2005. – 396 с.

3. Сергеева Л. Н. Нелинейная экономика: модели и методы : монография / Л. Н. Сергеева. – Запорожье : Полиграф, 2003. – 218 с.

4. Мантенья Р. Н. Введение в эконофизику: Корреляции и сложность в фінансах / Р. Н. Мантенья, Г. Ю. Стенли ; пер.с англ. – М. : Мир, 2009. – 192 с.

5. Максишко Н. К. Моделювання економіки методами дискретної нелінійної динаміки : монографія / Н. К. Максишко. – Запоріжжя : Полиграф, 2009. –415 с.

6. Вязьмин С. А. Применение вейвлет-анализа в анализе и прогнозировании финансовых рынков / С. А. Вязьмин, В. С. Киреев // Научная сессия МИФИ – 2004. – Том В: Экономика и управление. – С. 69 – 70.

7. Прентер Р. Р. Волновой принцип Эллиота. Ключ к пониманию рынка / Р. Р. Прентер, А. Дж. Фрост / Пер. с англ. – М. : Изд. Дом «Альпина», 2001. – 268 с.

8. Сергеева Л. Н. Современные методы анализа экономических временных рядов и построения прогнозных моделей / Л. Н. Сергеева, Н. К. Максишко // Економічна кібернетика. – 2005. – № 1-2 (31-32). – С. 73 – 79.

9. Ивахненко А. Г. Самоорганизация прогнозирующих моделей / А. Г. Ивахненко, И. А. Мюллер. – К. : Техніка, 1984. – 222 с.

10. Frank D. Nonlinear Fokker-Planck equations fundamentals and applications / D. Frank. – N. J.,London: Springr-Velag, 2005. – 407 p.

11. Босов А. Д. Эмпирическое уравнение Фоккера – Планка для прогнозирования нестационарных временных рядов / А. Д. Босов, Ю. Н. Орлов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2013. – № 3. – 30 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://library.keldysh.ru/ pre print.asp?id =2013-3

12. Takens F. Detecting Strange attractors in turbulence / F. Takens // Dynamical Systems and turbulence, eds. P. Pand, L. Young. Berlin: Springer – Verlag. – P. 366 – 382.

REFERENCES

Bosov, A. D., and Orlov, Yu. N. "Empiricheskoe uravnenie Fokkera-Planka dlia prognozirovaniia nestatsionarnykh vremennykh riadov" [Empirical Fokker-Planck equation for predicting non-stationary time series]. http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-3

Ekonomichna entsyklopediia [Economic Encyclopedia]. Kyiv: Akademiia, 2000.

Frank, D. *Nonlinear Fokker-Planck equations fundamentals and applications*. New York; London: Springr-Velag, 2005.

Heets, V. M., Klebanova, T. S., and Cherniak, O. I. *Modeli i metody sotsialno-ekonomichnoho prohnozuvannia* [Models and methods of social and economic forecasting]. Kharkiv: INZhEK, 2005.

Maksyshko, N. K. *Modeliuvannia ekonomiky metodamy dyskretnoi neliniinoi dynamiky* [Modeling techniques economy discrete nonlinear dynamics]. Zaporizhzhia: Polyhraf, 2009.

Mantenia, R. N., and Stenli, G. Yu. *Vvedenie v ekonofiziku: Korreliatsii i slozhnost v finansakh* [Introduction to Econophysics: Correlations and complexity in finance]. Moscow: Mir, 2009.

Prenter, R. R., and Frost, A. Dzh. *Volnovoy printsip Elliota. Kliuch k ponimaniiu rynka* [Elliott Wave Principle. The key to understanding the market]. Moscow: Alpina, 2001.

Serheeva, L. N., and Maksyshko, N. K. "Sovremennye metody analiza ekonomicheskikh vremennykh riadov i postroenyia prognoznykh modelei" [Modern methods of analyzing economic time series and build predictive models]. *Ekonomichna kibernetyka*, no. 1-2 (31-32) (2005): 73-79.

Sergeeva, L. N. *Nelineynaia ekonomika: modeli i metody* [Nonlinear economy: models and methods]. Zaporozhe: Poligraf, 2003.

Takens, F. "Detecting Strange attractors in turbulence" In *Dynamical Systems and turbulence*, 366-382. Berlin: Springer – Verlag.

Viazmin, S. A., and Kireev, V. S. "Primenenie veyvlet-analiza v analize i prognozirovanii finansovykh rynkov" [Application of wavelet analysis in analyzing and forecasting the financial markets]. In *Nauchnaia sessiia MIFI. Ekonomika i upravlenie*, 69-70, 2004.

Yvakhnenko, A. H., and Miuller, Y. A. *Samoorganizatsiya prognoziruiushchikh modelei* [Self-organization of predictive models]. Kyiv: Tekhnika, 1984.