УДК 338.984

ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ЗАТРАТ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

ЕВСТРАТ Д. И., ПРИХОДЬКО А. А.

УДК 338.984

Евстрат Д. И., Приходько А. А. Применение оптимизационных моделей для планирования затрат производственного предприятия

В статье раскрыта сущность планирования деятельности производственного предприятия, рассмотрены причины возникновения проблемы планирования, проанализированы распространенные методы решения данной проблемы. Предложена имитационная модель, описываемая системой дифференциальных уравнений, которая отражает поведение и взаимосвязь основных финансовых показателей производственного предприятия и учитывает внешние инвестиции, поставлена и решена оптимизационная задача, построена модель управления. Изложенный метод позволяет находить различные оптимальные управленческие решения в зависимости от выбранного критерия качества и является более гибким инструментом, чем традиционные методы линейного программирования, методы прогнозирования с помощью нейронных сетей, нечеткого программирования, динамические модели, описываемые системами управляемых дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *производственное планирование, оптимизационная модель, дифференциальная система, принцип максимума, оптимальное управление.*

Формул: *16.* ***Библ.:*** *8.*

Евстрат Дмитрий Иванович *- кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры экономической кибернетики и прикладной экономики, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина (пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина)*

E-mail: *devstrat@km.ru*

Приходько Андрей Александрович *– магистрант, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина (пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина)*

E-mail: *patriot665@gmail.com*

УДК 338.984

Євстрат Д. І., Приходько А. О. Застосування оптимізаційних моделей для планування витрат виробничого підприємства

У статті розкрито сутність планування діяльності виробничого підприємства, розглянуто причини виникнення проблеми планування, проаналізовано поширені методи вирішення даної проблеми. Запропоновано імітаційну модель, що описується системою диференціальних рівнянь, яка відображає поведінку і взаємозв'язок основних фінансових показників виробничого підприємства і враховує зовнішні інвестиції, поставлено і вирішено оптимізаційну задачу, побудовано модель управління. Викладений метод дозволяє знаходити різні оптимальні управлінські рішення залежно від обраного критерію якості і є більш гнучким інструментом, ніж традиційні методи лінійного програмування, методи прогнозування за допомогою нейронних мереж, нечіткого програмування, динамічні моделі, що описані системами керованих диференціальних рівнянь.

Ключові слова: *виробниче планування, оптимізаційна модель, диференціальна система, принцип максимума, оптимальне управління.*

Формул: *16.* ***Бібл.:*** *8.*

Євстрат Дмитро Іванович *– кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики та прикладної економіки, Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна (пл. Свободи, 4, Харків, 61022, Україна)*

E-mail: *devstrat@km.ru*

Приходько Андрій Олександрович *– магістрант, Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна (пл. Свободи, 4, Харків, 61022, Україна)*

E-mail: *patriot665@gmail.com*

UDC 338.984

Yevstrat D. I., Prykhodko A. O. Application of Optimisation Models for Planning Expenditures of a Production Enterprise

The article describes essence of planning of activity of a production enterprise, considers reasons of appearance of the problem of planning and analyses widespread methods of solution of this problem. It offers an imitation model, described by the system of differential equations, which reflects behaviour and interconnection of main financial indicators of a production enterprise and takes into account external investments, sets and solves the optimisation task and builds up the management model. The described method allows finding various optimal managerial decisions depending on the selected quality criterion and is a more flexible instrument than traditional methods of linear programming, methods of forecasting with the help of neural networks, fuzzy programming, dynamic models, described by systems of managed differential equations.

Key words: *production planning, optimisation model, differential system, principle of maximum, optimal management.*

Formulae: *16.* ***Bibl.:*** *8.*

Yevstrat Dmitriy I.– *Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Economic Cybernetics and Applied Economics, V. N. Karazin Kharkiv National University (pl. Svobody, 4, Kharkiv, 61022, Ukraine)*

E-mail: *devstrat@km.ru*

Prykhodko Andrey A.– *Graduate Student, V. N. Karazin Kharkiv National University (pl. Svobody, 4, Kharkiv, 61022, Ukraine)*

E-mail: *patriot665@gmail.com*

Сегодня сложно представить современное предприятие, на котором планированию финансовой деятельности не отводится весомая роль. Являясь одной из функций процесса управления предприятием, планирование служит основой для принятия управленческих решений и представляет собой деятельность, которая предусматривает выработку целей и задач управления производством, а также определение путей реализации планов для достижения поставленных целей [1].

Процесс планирования проходит четыре этапа [1]:

- разработку общих целей;
- определение конкретных, детализированных целей на заданный период;
- определение путей и средств их достижения;
- контроль за достижением поставленных целей, путем сопоставления плановых показателей с фактическими, корректировку целей.

Планирование опирается на данные деятельности предприятия прошлых периодов и осуществляется для того, чтобы определять и контролировать развитие предприятия в перспективе. Поэтому надежность плана зависит от точности фактических показателей прошлых периодов и адекватности математической модели планирования.

Планирование эффективно там, где требуется улучшить качество принимаемых решений путем преодоления сложности проблемных ситуаций, обусловленной большим количеством взаимодействующих факторов и причинно-следственных связей, а также несогласованностью мнений экспертов, принимающих решение относительно сценария развития планируемых процессов и событий.

В современных условиях, когда планирование на предприятии базируется на неполных данных, даже в условиях хорошо налаженной системы бухгалтерского и статистического учета, а некоторые аспекты функционирования экономической системы, такие как действия конкурентов, экономические циклы, социальные проблемы в обществе, политическая обстановка и пр. не поддаются оценке, решение задачи оптимизации планирования затрат производственного предприятия представляется особенно актуальным.

Традиционными для решения задач планирования стали методы математического программирования, в частности, методы выпуклого квадратичного и особенно линейного программирования [2, 3]. При изучении экономических проблем весьма успешно применяются модели динамических процессов [4]. На современном этапе активно используются методы прогнозирования с помощью нейронных сетей, нечеткого программирования, динамические модели, описываемые системами управляемых дифференциальных уравнений [5, 6].

Рассмотренные подходы к обработке наблюдаемых величин для решения задачи оптимального планирования базируются исключительно на корреляционном или регрессионном анализе без выявления физической сущности рассматриваемых взаимосвязей с учетом фактора времени. Это существенно затрудняет прогнозирование развития производства во времени, особенно долгосрочное, и влияние на него производственных факторов, что серьезно препятствует выбору оптимальных решений и управления экономическими процессами.

Целью статьи является решение оптимизационной задачи планирования затрат на основании адаптированной дифференциальной динамической модели деятельности производственного предприятия с учетом внешних инвестиций.

С точки зрения формализации процедуры планирование представляет собой алгоритмизированный процесс подготовки решений в противоположность спонтанному, ситуативному принятию управленческих решений [7].

Модель принятия решений обычно содержит следующие элементы [8]:

- цели (систему целей), охватывающие как совокупность целевых функций, так и приоритетные соотношения, показывающие, с какой относительной интенсивностью достигаются различные целевые функции, а также разнообразные характерные проявления целевых функций;
- альтернативы (модели или отдельные варианты действий или комплекс этих действий);
- асостояния внешней среды (состояние в будущем, факторы влияния);
- функции результативности.

Все состояния внешней среды, взаимоисключающие друг друга, формируют пространство состояний. В случае необходимости учета нескольких вариантов состояния внешней среды имеет место либо ситуация риска, при которой проявляется объективная или субъективная вероятности наступления событий внешнего характера, либо ситуация неопределенности.

Прогноз влияния варианта принятия решений при определенном состоянии внешней среды оценивается с помощью функции результативности, относительно которой ситуации могут подразделяться на ситуации определенности, риска или неопределенности. Для комбинации из альтернативы и состояния внешней среды однозначные последствия возникают только в ситуации определенности, а в ситуациях неопределенности и риска возможно несколько результатов.

Неопределенность в отношении состояния внешней среды и функций результативности можно отразить в виде «неясных качеств» инвестиционного планирования, преследуя цель создания потенциала успеха. Преобразование этой целевой установки в операционные и по возможности количественные целевые функции – очень важная и трудоемкая проблема. Особенно трудным является количественное отражение факторов влияния и расчета данных в случае осуществления инвестиций нематериального характера или включения в модель новых технологий или новых рынков, а также учет в модели фактора доступа к источникам информации или влияния внешних факторов и вероятности их наступления [8].

Рассмотрим планирование выпуска продукции на производственном предприятии с использованием экономической оптимизационной модели описанной управляемой системой дифференциальных уравнений, а также интерпретацию результатов ее решения полученного с помощью принципа максимума Понтрягина.

Будем полагать, что доход предприятия в единицу времени зависит от объема выпуска продукции $x(t)$, наличного основного капитала фирмы $K(t)$ и времени t, т. е. определяется функцией $u(K(t), x(t), t)$. Запас капитала связан с принимаемым решением – величиной выпуска – следующим соотношением:

$$\frac{dK}{dt} = f(K, x, t). \qquad (1)$$

Начальный размер основного капитала $K(0) = C$.

Требуется найти объем выпуска продукции $x(t)$, который доставлял бы максимум функционалу:

$$W[x(t)] = \int_0^T u(K(\tau),\, x(\tau),\, \tau)\, dt. \qquad (2)$$

Особенностью данной задачи является наличие ограничения (1), обусловливающего тот факт, что принимаемое решение имеет двойной эффект – немедленный вклад в суммарный доход и воздействие на запас капитала и доход в последующие моменты времени. Не вдаваясь в математические тонкости, отметим, что это ограничение не дает возможности непосредственно использовать уравнение Эйлера для нашей задачи. Необходимо отметить, что использование для решения данной задачи классических методов вариационного исчисления весьма затруднено. Методы же динамического программирования позволяют преодолеть возникающие трудности. Это особенно актуально потому, что в реальных задачах, как правило, приходится сталкиваться именно с экстремальными задачами с ограничениями [2].

Оптимальное управление x в каждый момент должно удовлетворять таким уравнениям:

$$\text{(I)}\ \frac{dK}{dt} = f(K,\ x,\ t);$$

$$\text{(II)}\ u = \lambda f = \max_x (u - \lambda f)$$

$$\text{(III)}\ \frac{du}{dK} - \lambda \frac{df}{dK} = -\lambda'.$$

Известный американский экономист Дорфман, исследовавший данную задачу, придает этим уравнениям следующий экономический смысл [2]:

I – характеризует темп роста капитала в каждый момент в зависимости от текущего состояния и принимаемого управления;

II – показывает, что очищенный доход, т. е. доход, из которого исключена маргинальная предельная оценка накапливаемого капитала, в каждый момент максимален на оптимальной траектории;

III – скорость обесценивания капитала при оптимальном управлении определяется маргинальной оценкой капитала для максимизации дохода. Чем выше эта оценка, тем медленнее происходит обесценивание.

Решение уравнений (I) – (III), составляющих аналитическое выражение принципа максимума Понтрягина, может быть осуществлено одним из методов, разработанных в теории дифференциальных уравнений. Нередко оно оказывается более простым, чем решение исходной задачи другими методами [2].

Зависимости между основными переменными модели предприятия показывают взаимосвязь между агрегированными переменными (такими, как объём выпуска, стоимость основных производственных фондов и темпы их прироста, общая и чистая прибыль, сумма налоговых отчислений и т. д.) и могут быть представлены следующей совокупностью уравнений [5]:

$$P(t) = fA(t); \tag{3}$$

$$M^{об}(t) = (1 - c)P(t); \tag{4}$$

$$M(t) = M^{об}(t) - N(t); \tag{5}$$

$$N(t) = \tau_1 P(t) - \tau_2 K_Л\,(1 - \xi)\, M^{об}(t); \tag{6}$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \xi M(t) + I(t) + \alpha\delta(t); \tag{7}$$

$$t \in [0, T],\ t_0 \in [0, T], \xi \in [0,1], K_Л \in (0,1]; \tag{8}$$

$$\delta(t) = \theta'(t),\ \theta(t) = \begin{cases} 1, \text{ при } t - t_0 \geq 0 \\ 0, \text{ при } t - t_0 \leq 0 \end{cases}, \tag{9}$$

где $P(t)$ – выпуск продукции в момент t в стоимостном выражении; f – показатель фондоотдачи, характеризующий уровень эффективности использования производственных основных фондов; $A(t)$ – стоимость основных производственных фондов; c – доля удельной себестоимости выпуска продукции в стоимостном выражении; $M^{об}(t)$ – общий доход предприятия; $M(t)$ – чистый доход предприятия; $N(t)$ – сумма налоговых отчислений; τ_1, τ_2 – ставки налогообложения на объём выпуска и прибыль соответственно; ξ – доля чистой прибыли, отчисляемой на реинвестирование $0 \leq \xi \leq 1$; $K_Л$ – коэффициент, отражающий долю реинвестируемых средств прибыли, не имеющих льгот по налогообложению (не все реинвестируемые средства освобождаются от налогов), характеризующий соотношение общей и чистой прибыли предприятия и оцениваемый статистическим путём $0 < K_Л < 1$; $I(t)$ – внешние инвестиции, полученные предприятием; $\theta(t)$ – функция Хевисайда (обобщённая функция); α – величина внешних возмущений.

В результате преобразования равенств (3) – (9) получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = \nu\left(\xi(M^{об}(t) - N(t)) + I(t) - a\dfrac{dM}{dt}\right) \\ \dfrac{dN(t)}{dt} = a\nu(\xi M(t) - I(t)) \\ M(t_0) = M_0,\ N(t_0) = N_0, \end{cases} \tag{10}$$

где $a = \left(\dfrac{\tau_1}{1-c} - \tau_2 K_Л (1-\xi)\right)$; $\nu = f(1-c)$.

В качестве управления возьмем функцию $I(t)$, т. е. внешние инвестиции.

Внешний инвестиционный фактор дополняет действие рассмотренной положительной обратной связи экономического объекта и определяет темпы динамики его развития. При этом важными оказываются как величина осуществляемой инвестиционной поддержки и её регулярность (динамика инвестиций во времени), так и другие условия её предоставления (плата за инвестиционный ресурс в виде ставки процента за кредит, сроки возврата кредита и т. д.).

Для одноразовых инвестиций наиболее применимы интуитивные методы. Для динамических моделей расчета инвестиций характерны такие данные, как будущие поступления и платежи, относящиеся к определенным периодам и срокам. Анализ модели позволяет определить степень влияния нескольких альтернатив в понятной форме и интегрировать в модель фактор неопределенности в будущем. Успех анализа модели зависит от множества факторов: расчета данных, оценок и частоты их использования; лежащей в основе модели ситуации, при которой происходит планирование; приемлемости достигнутых результатов для лица принимающего решения и др.

В силу того, что $u(t) = I(t)$, система (10) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dM(t)}{dt} = \nu\left(\xi(M^{об}(t) - N(t)) + u(t) - a\dfrac{dM^{об}(t)}{dt}\right) \\ \dfrac{dN(t)}{dt} = a\nu(\xi M(t) - u(t)) \\ M(t_0) = M_0,\ N(t_0) = N_0. \end{cases} \quad (11)$$

Ограничения на инвестиционный капитал:

$$\int_{t_0}^{T} |u(\tau)| d\tau \le K. \quad (12)$$

Величину $K \ge 0$ можно считать некоторым денежный капиталом, который можно потратить на инвестирование нашего предприятия в течение $T - t_0$ лет.

Для случая, когда внешние инвестиции $I(t)$ выплачиваются предприятию государством, а налог $N(t)$ – часть прибыли, отчисляемая предприятием в государственный бюджет, можно рассмотреть показатель $I(t) - N(t)$ как часть денег, уплаченная предприятием, которая не возвращается в виде государственных инвестиций $I(t) - N(t)$. Решение задачи сводится к максимизации величины $I(t) - N(t)$.

С учетом ограничения (12) система (11) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dM(t)}{dt} = \nu\left(\xi(M^{об}(t) - N(t)) + u(t) - a\dfrac{dM^{об}(t)}{dt}\right) \\ \dfrac{dN(t)}{dt} = a\nu(\xi M(t) - u(t)) \\ \dot{x} = u(t) \\ M(t_0) = M_0,\ N(t_0) = N_0,\ x(t_0) = 0,\ x(T) \le K. \end{cases} \quad (13)$$

$$\int_{t_0}^{T} I(t) - N(t)\, d\tau \to \max. \quad (14)$$

Введем следующие обозначения:

$$\hat{a} = \nu\xi,\ \hat{b} = a\nu\xi,\ \gamma = \hat{a}\hat{b}.$$

В силу свойств констант a, ν, ξ следует, что $\gamma \ge 0$, $\hat{a} \ge 0$, $\hat{b} \ge 0$.

В новых обозначениях матрица системы (13) принимает вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{a} & 0 \\ \hat{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{b} & 0 \\ -\hat{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица B:

$$B = \begin{pmatrix} \nu \\ \hat{b} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сопряженная система имеет вид:

$$\dot{\psi} = -A'\psi.$$

Построим функцию Гамильтона:

$$H = (\psi, Bu) + \psi_0(u - x_2) =$$
$$= ((\nu\psi_1 + \hat{b}\psi_2 + \psi_3) - \psi_0)u + \psi_0 x_2.$$

Условия трансверсальности на ψ:

$$\psi(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Построим характеристический полином для матрицы A':

$$\chi = -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & \hat{b} \\ -\hat{a} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + \gamma)$$
$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm i\gamma.$$

Общее решение:

$$\ddot{x}_1 = -\hat{a}\dot{x}_2 = -\hat{a}\hat{b}x_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \hat{a}\hat{b}x_1 = 0$$
$$\dot{x}_1 = C_1\sin(\gamma t) + C_2\cos(\gamma t)$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\hat{a}}(C_1\sin(\gamma t) + C_2\cos(\gamma t)).$$

Для неоднородной системы $\dot{x} = Ax + Bu + F(t)$ используем формулу Коши:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{T} e^{A(\tau - t)}Bu\, d\tau + \int_{t_0}^{T} e^{A(t-\tau)}F(\tau)\, d\tau. \quad (15)$$

Функция Гамильтона принимает вид:

$$H = -u - \psi_0 u + x_2.$$

Применяя принцип максимума Понтрягина [6], с учетом ограничений $u(t) \le \delta(t)$, $\forall t \in [t_0, T]$, находим оптимальное управление:

$$u_0(t) = \begin{cases} \delta(t), \text{ при } t \in [t_0, T_\delta] \\ 0, \text{ при } t \in [T_\delta, T] \end{cases}. \quad (16)$$

Полученное выражение демонстрирует общий вид оптимального управления для задачи (13) – (14).

На основе статистической информации о результатах финансово-экономической деятельности производственного предприятия прошедших периодов строится динамическая модель функционирования предприятия, на основании которой, после предварительной обработки, мы получаем адаптированную и оптимизационную модели, предоставляющие возможность наглядно продемонстрировать траектории систем и реальные значения исследуемых показателей, а также дать экономическую интерпретацию полученных результатов. Математические вычисления производятся в пакете символьного анализа Wolfram Mathematica с использованием функций Fit, FindFit, DSolve, Solve.

ВЫВОДЫ

Предложена имитационная модель, описываемая системой дифференциальных уравнений, которая отражает поведение и взаимосвязь основных финансовых показателей производственного предприятия и учитывает внешние государственные инвестиции, поставлена и решена оптимизационная задача. Изложенный метод позволяет находить различные оптимальные управленческие решения в зависимости от выбранного критерия качества и является более гибким инструментом, чем традиционные методы линейного программирования, методы прогнозирования с помощью нейронных сетей, нечеткого программирования, динамические модели, описываемые системами управляемых дифференциальных уравнений. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин А. И. Планирование на предприятии : учебник / А. И. Ильин. – Мн. : Новое знание, 2001. – 635 с.

2. Канторович Л. В. Оптимальные решения в экономике : учебник / Л. В. Канторович, А. В. Горстке. – М. : Изд-во «Наука», 1972.

3. Тер-Крикоров А. М. Оптимальное управление и математическая экономика / А. М. Тер-Крикоров. – М. : Изд-во «Наука», 1977. – 216 с.

4. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления : учебник / В. Г. Болтянский. – М. : Изд-во «Наука», 1969. – 408 с.

5. Дифференциальные динамические модели : учебное пособие / Б. И. Герасимов, Н. П. Пучков, Д. Н. Протасов. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 80 с.

6. Хорошун Л. П. Математические модели динамики производства в макроэкономике / Л. П. Хорошун // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2002. – № 3. – С. 99 – 113.

7. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учеб. пособие для вузов. – М. : ЮНИТИ- ДАНА, 2001. – 367 с.

8. Власов М. П. Моделирование экономических процессов / М. П. Власов, П. Д. Шимко. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 409 с.

REFERENCES

Boltianskiy, V. G. *Matematicheskie metody optimalnogo upravleniia* [Mathematical methods of optimal control]. Moscow: Nauka, 1969.

Gerasimov, B. I., Puchkov, N. P., and Protasov, D. N. *Differentsialnye dinamicheskie modeli* [Differential dynamic models]. Tambov: GOU VPO TGTU, 2010.

Ilin, A. I. *Planirovanie na predpriiatii* [Planning for the enterprise]. Minsk: Novoe znanie, 2001.

Kantorovich, L. V., and Gorstke, A. V. *Optimalnye resheniia v ekonomike* [Optimal solutions in the economy]. Moscow: Nauka, 1972.

Khoroshun, L. P. “Matematycheskye modely dynamyky proyzvodstva v makroekonomyke“ [Mathematical models of the dynamics of production in macroeconomics]. *Systemni doslidzhennia ta informatsiini tekhnolohii*, no. 3 (2002): 99-113.

Shelobaev, S. I. *Matematicheskie metody i modeli v ekonomike, finansakh, biznese* [Mathematical methods and models in economics, finance, and business]. Moscow: YuNITI- DANA, 2001.

Ter-Krikorov, A. M. *Optimalnoe upravlenie i matematicheskaia ekonomika* [Optimal control and mathematical economics]. Moscow: NAUKA, 1977.

Vlasov, M. P., and Shimko, P. D. *Modelirovanie ekonomicheskikh protsessov* [Modeling of economic processes]. Rostov-na-Donu: Feniks, 2005.