УДК 658.212:519.2

МОДЕЛЬ БАГАТОВИМІРНОГО ЧАСОВОГО РЯДУ З ДОВІЛЬНИМ ПОРЯДКОМ АВТОРЕГРЕСІЇ

ЧЕРНЯК О. І.
доктор економічних наук
Київ
ХОХЛОВ В. В.
кандидат технічних наук
Севастополь

Комплексне дослідження економічних систем припускає вивчення багатовимірних часових рядів – векторів економічної інформації. Особливістю таких рядів є наявність взаємних залежностей двох видів: кореляційної – між компонентами вектора, і авторегресійної – між моментами спостережень за компонентами. Створення моделі, яка враховує авторегресійні залежності довільного порядку й кореляційні зв'язки між змінними, а також розробка методів оцінювання параметрів такої моделі, що відображає процеси динаміки економічної системи, є актуальними.

Серед розповсюджених останнім часом методів дослідження векторних процесів слід зазначити експертно-аналітичний метод, або метод «ЖОК» [1], який застосовується для оцінки результатів впливу змінних на підсумкові показники й один на одного. Цей метод використовує економіко-математичну модель багатовимірного часового ряду, у якій коефіцієнти безпосереднього впливу змінних одна на одну й початкові умови задаються експертами.

На початку дослідження, відповідно до цього методу, експертним шляхом визначається список найбільш суттєвих змінних, які необхідно врахувати при аналізі конкретної ситуації. При цьому деяка частина змінних може носити якісний характер, наприклад, якість продукції, стан ринку й таке інше. Після цього визначаються необхідні для роботи моделі рівні змінних, відповідному початковому стану економічного об'єкта, і для нечислових змінних проводиться кодування. Потім експертами складається блок-схема безпосередніх впливів істотних змінних одна на одну й оцінюється ступінь безпосередніх впливів за допомогою деякої шкали. Виходить економіко-математична модель у вигляді зваженого орієнтованого графа з початковими даними у вершинах. Потім за допомогою обчислювальної техніки прораховуються впливи другого, третього й т. д. рівнів, що відповідають другому, третьому і т. д. моментам часу аж до одержання стабільного стану. Результат роботи такої моделі – кінцеві рівні змінних.

Система ЖОК дозволяє простежити динаміку зміни значень досліджуваних змінних аж до їхньої стабілізації. При цьому факт стабілізації є важливим методологічним висновком з експериментів з моделлю ЖОК: «Після первісних сплесків замкнута економічна система стабілізується, хоча б і на досить низькому рівні виробництва й споживання» [1, с. 89].

Методи, засновані на експертних оцінках, безумовно, мають право на існування. Але думки експертів, навіть найбільш ерудованих і підготовлених, є суб'єктивними, а компілювання декількох суб'єктивних думок для виведення загальної оцінки навряд чи може привести до результату, вільного від суб'єктивності. Справді науковий підхід до вивчення складних об'єктів складається у виявленні об'єктивного образу предмета дослідження, що можливо лише в результаті обробки екзогенних даних методами, позбавленими будь-якої суб'єктивності. Якщо об'єкт дослідження, представлений багатовимірним часовим рядом, у якому за означенням наявна повна інформація про об'єкт, то виявити істотні змінні, а також істотні зв'язки між ними можна, не вдаючись до допомоги експертів, а за допомогою об'єктивних і більш розроблених методів.

До таких методів можна віднести використання VAR-моделі – векторної авторегресійної моделі [2]. Вона описується системою рівнянь, причому кількість рівнянь дорівнює кількості досліджуваних змінних. Кожне рівняння являє собою залежність даної змінної від значень усіх змінних у попередніх моментах часу (у цьому випадку говорять, що має місце авторегресія порядку p). Модель враховує вплив, як власних лагових значень, так і лагових значень інших змінних. Таким чином, вона дозволяє встановити й аналітичну авторегресійну залежність змінних, і вплив інших змінних на поточне значення кожної з них.

Однак якщо досліджуються n змінних, і порядок авторегрессии дорівнює p, тоді кількість коефіцієнтів, що підлягають оцінці, дорівнює ($n + p \cdot n^2$). Наприклад, при $n = 5$, $p = 4$ необхідно знайти 105 значень [2, с. 293]. Якщо модель буде містити більше декількох десятків змінних, і навіть при невеликому порядку авторегресії, скажімо $p = 2$, кількість коефіцієнтів буде не менше 820. Щоб отримати спроможні оцінки параметрів моделі, довжина ряду повинна бути більшою, ніж це число. Цей факт робить метод мало придатним для практичного використання в аналізі багатовимірних часових рядів.

Щоб обійти цю проблему, VAR-модель трансформують до вигляду класичного регресійного рівняння, що зв'язує дану змінну з лаговими значеннями всіх змінних, зведених в одну матрицю. Далі, застосовуючи метод найменших квадратів, знаходять оцінки всіх коефіцієнтів вихідної моделі. Але в цьому випадку є одна особливість. Застосування методу найменших квадратів до оцінки параметрів регресійного рівняння обумовлено декількома апріорними допущеннями. Одне з них полягає в тому, що регресори мають бути незалежними величинами. Однак у багатовимірному часовому ряді змінним властиві кореляційні зв'язки, і вважати стовпці матриці регресорів взаємно незалежними буде некоректно. Таким чином, має місце порушення одного з припущень класичної регресійної моделі. Далі, ще одне припущення регресійного аналізу говорить про те, що незалежні змінні й випадкові відхилення рівняння не повинні корелювати. Однак для VAR-моделі можна показати, що деякі регресори корелюють із випадковими відхиленнями. Отже, порушується ще одне припущення регресійного аналізу. А кожне порушення припущення регресійного аналізу вимагає коректування як моделі багатовимірного часового ряду, так і методу оцінки її параметрів.

Метою статті є побудова моделі багатовимірного часового ряду з довільним порядком авторегресії.

Значення економічних показників (випадкових змінних) у даний момент часу не може не залежати від їхніх значень у попередні моменти часу. У таких часових залежностях простежується як природа об'єктивних економічних законів, так і внутрішніх, властивих лише даній економічній системі, особливостей. Лагові залежності є особливою рисою економічних явищ, і саме вони, в основному, визначають характерні риси динаміки економічних систем. Таким чином, для них характерним і визначальним є авторегресійний процес.

Але оскільки самі економічні змінні є лише вимірюваними характеристиками системи, а за цими змінними стоять стохастичні фактори, які й визначають її поведінку, то саме вони задають авторегресійний процес в економічній системі.

У роботі [3] розглядалася модель авторегресії факторів першого порядку. Розглянемо модель динаміки економічної системи з авторегресійними залежностями довільного порядку.

Розглянемо багатовимірну факторну авторегресійну модель порядку p

$$f_t = f_{t-1}\psi_1 + f_{t-2}\psi_2 + \ldots + f_{t-p}\psi_p + u_t, \qquad (1)$$

де $f_t = (f_{t,1}, \quad f_{t,2}, \quad \ldots \quad f_{t,m})$ – значення стохастичних факторів для моменту часу t; m – число факторів;

аналогічно $f_{t-k} = (f_{t-k,1}, \quad f_{t-k,2}, \quad \ldots \quad f_{t-k,m})$ – значення стохастичних факторів для моменту часу $t - k$ ($k = 1, 2, \ldots, p$);

$\psi_k = (\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_m)$ – значення коефіцієнтів багатовимірної авторегресії;

$u_t = (u_{t1}, \quad u_{t2}, \quad \ldots, \quad u_{tm})$ – вектор випадкових відхилень із нульовим математичним очікуванням і постійними дисперсіями.

Значення змінюваних змінних задаються рівнянням факторної структури

$$z_t = f_t A^T + v_t, \qquad (2)$$

де $z_t = (z_{t1}, z_{t2}, \ldots, z_{tm})$ – вектор стандартизованих значень змінних – економічних показників у момент часу t; n – число досліджуваних змінних; $(\bullet)^T$ – знак транспонування матриці; A – матриця факторних навантажень, що має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

$v_t = (v_{t1}, v_{t2}, \ldots, v_{tm})$ – вектор випадкових збурень рівняння факторної структури.

Стандартизовані значення змінних являють собою відношення різниці поточної величини змінної й величини її тренду в момент часу t до середньоквадратичного відхилення.

Рівняння (1) може бути представлене у вигляді:

$$f_t = (f_{t-1}, \quad f_{t-2}, \quad \ldots, \quad f_{t-p}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \ldots \\ \psi_p \end{pmatrix} + u_t \qquad \mathbf{(3)}$$

Введемо таке позначення для матриці значень факторів від моменту часу 1 до поточного t

$$F_t = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_t \end{pmatrix};$$

матриця значень факторів з часовим зсувом на k кроків від поточного моменту часу:

$$F_{t-k} = \begin{pmatrix} f_{1-k} \\ f_{2-k} \\ \ldots \\ f_{t-k} \end{pmatrix}.$$

Також введемо блочну матрицю лагових значень факторів

$$\Xi_{t-p} = (F_{t-1} \mid F_{t-2} \mid \ldots \mid F_{t-p})$$

і блочну матрицю коефіцієнтів авторегресії

$$\Theta = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \hline \psi_2 \\ \hline \ldots \\ \hline \psi_p \end{pmatrix}.$$

Тоді авторегресійна залежність (3) для довільного моменту часу прийме вигляд:

$$F_t = \Xi_{t-p}\Theta + U_t, \qquad \mathbf{(4)}$$

де $U_t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_e \end{pmatrix}$ – матриця випадкових відхилень.

Нехай відомі значення стохастичних факторів експлораторної факторної моделі для ($N + p - 1$) моментів часу (N – «поточних» моментів часу і p – попередніх, включаючи деякий «нульовий» момент часу) [4].

Необхідно побудувати оцінку матриці коефіцієнтів авторегресійної моделі (4) так, щоб мінімізувати сумарну квадратичну похибку, але при цьому значення факторів повинні бути ортогональними. Припустимо, що існують значення факторів для моментів часу: $\{-p+1; -p+2; ..., -1; 0; 1; 2; ... t; ...; N\}$. Позначимо матриці

$$F = F_N;\ \Xi_{-p} = \Xi_{N-p}.$$

Тоді завдання оцінювання може бути сформульована в такий спосіб: знайти Θ так, щоб мінімізувати $tr\{(F-\Xi_{-p}\Theta)^T(F-\Xi_{-p}\Theta)\}$ за умови, що $F^TF = 1$ або $(\Xi_{-p}\Theta)^T\Xi_{-p}\Theta = I$. Тобто, знайти в класі ортогональних оцінок такі, які мінімізували б функцію втрат. Для цього складемо матричну функцію Лагранжа:

$$g = tr\{(F-\Xi_{-p}\Theta)^T(F-\Xi_{-p}\Theta)\} + tr\{\Lambda((\Xi_{-p}\Theta)^T\Xi_{-p}\Theta - I)\}.$$

$$g = tr\{(F-\Xi_{-p}\Theta)^T(F-\Xi_{-p}\Theta)\} + \\ +tr\{\Lambda((\Xi_{-p}\Theta)^T\Xi_{-p}\Theta - I)\}. \quad (5)$$

Обчислюючи похідні функції Лагранжа, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases}(F-\Xi_{-p}\Theta)^T\Xi_{-p} + \Xi_{-p}^T\Xi_{-p}\Theta\Lambda = 0;\\ (\Xi_{-p}\Theta)^T\Xi_{-p}\Theta - I = 0.\end{cases} \quad (6)$$

Розв'язком системи (6) будуть такыі оцінки коефіцієнтів авторегресії:

$$\widehat{\Theta} = (\Xi_{-p}^T\Xi_{-p})^{-1}\Xi_{-p}^TF(F^T\Xi_{-p}(\Xi_{-p}^T\Xi_{-p})^{-1}\Xi_{-p}^TF)^{-\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Отримані оцінки дозволяють на підставі моделі (1) і значень факторів у попередні моменти часу зробити прогноз динаміки факторів. Використовуючи рівняння (2) можна оцінити майбутні величини безрозмірних, стандартизованих значень змінних. Перехід до величини економічного показника в натуральних одиницях виміру здійснюється за допомогою виразу

$$\hat{x}_t = \bar{x}_t + \hat{f}_t S, \quad (8)$$

де $\bar{x}_t$ – величина тренда вектора змінних у момент часу t;

$\hat{f}_t$ – оцінка вектора значень стохастичних факторів, одержувана з виразу (3) з використанням оцінки (7);

S – діагональна матриця величин середньоквадратичних відхилень змінних.

Для оцінки параметрів моделі й побудови прогнозу були взяті квартальні статистичні дані Державної служби статистики України [5]. Візьмемо такі показники: ВВП, споживання домогосподарств, експорт, імпорт, доходи населення, безробіття за період з 2004 р. по 2011 р.

На першому етапі визначимо порядок авторегресії p, для чого скористаємося критеріями для перевірки точності прогнозу: показником середньоквадратичної похибки у відсотках від фактичних значень (RMSPE) і середньою абсолютною похибкою у відсотках (MAPE) [6]:

$$RMSPE = 100\sqrt{\frac{1}{n\cdot p}\sum_t\sum_i\left(\frac{x_{t,i}-\hat{x}_{t,i}}{x_{t,i}}\right)^2}, \quad (9)$$

$$MAPE = \frac{100}{n\cdot p}\sum_t\sum_i\left|\frac{x_{t,i}-\hat{x}_{t,i}}{x_{t,i}}\right|, \quad (10)$$

де n – число змінних; p – число кроків прогнозу; $x_{t,i}$ – значення змінної часового ряду; $\hat{x}_{t,i}$ – прогнозне значення змінної.

Оцінку точності прогнозу може бути зроблено відповідно до *табл. 1* [6].

Таблиця 1

Оцінка точності прогнозу

MAPE, RMSPE	Точність прогнозу
Менше 10%	Висока
10% – 20%	Добра
20% – 40%	Задовільна
40% – 50%	Погана
Більше 50%	Незадовільна

Для різних значень порядку авторегресії були обчислені розрахункові значення показників на $p+2$ останні спостереження у вибірці (оцінку параметрів моделі було здійснено по вибірці, зменшеної на це число). Оскільки критерії RMSPE і MAPE віддали переваги різним величинам p, то було обчислене середнє значення цих двох критеріїв (*табл. 2*).

Таблиця 2

Значення критеріїв точності прогнозу

Порядок авторегресії	1	2	3	4	5	6
RMSPE	7,922	7,703	8,614	8,402	9,301	12,404
MAPE	4,891	4,125	4,140	3,879	4,387	5,862
Середнє	6,407	5,914	6,377	6,141	6,844	9,133

З табл. 2 видно, що аж до п'ятого порядку авторегресії прогнози є досить високими, але RMSPE має найменше значення при $p = 2$, а MAPE – при $p = 4$. Середнє значення критеріїв говорить по те, що кращий прогноз досягається при другому порядку авторегресії. Починаючи з 7-го порядку авторегресії, значення критеріїв різко погіршуються.

Прогноз шести макроекономічних показників економіки України наведений у *табл. 3.*

Таблиця 3

Прогноз шести макроекономічних показників економіки України

Період часу	ВВП, млн грн	Споживання ДГ, млн грн	Експорт, млн грн	Імпорт, млн грн	Дохід населення, млн грн	Безробіття, тис. осіб
II кв. 2012 р.	365946	235644	212508	218666	270509	2207
III кв. 2012 р.	368120	242334	226830	232452	272291	2380

Таким чином, валовий внутрішній продукт у третьому кварталі 2012 р. у порівнянні з другим кварталом зросте на 0,59%; споживання домашніх господарств – на 2,84%; експорт зросте на 6,73%, імпорт – на 6,31%. Доходи населення також зростуть, і приріст складе 0,67%. Однак збережуться негативні тенденції в зайнятості населення, число безробітних за третій квартал збільшиться на 173 тис. осіб, що складе 7,84%.

ВИСНОВКИ

Проведені дослідження показали ефективність застосування моделі багатовимірного часового ряду з довільним порядком авторегресії для прогнозування реальних економічних процесів. Авторегресійний процес визначається лаговими залежностями між стохастичними факторами. Для визначення порядку авторегресії можна скористатися критеріями якості прогнозу RMSPE і MAPE. Факторна авторегресійна модель дозволяє зробити короткостроковий прогноз значень макроекономічних показників. ■

ЛІТЕРАТУРА

1. Жихарев В. Н. Новый эконометрический метод «ЖОК» оценки результатов взаимовлияний факторов в инженерном менеджменте / В. Н. Жихарев, В. Г. Кольцов, А. И. Орлов.– В сб.: Проблемы технологии, управления и экономики / Под общей редакцией канд. экон. наук. Панкова В. А. Ч. 1. Краматорск : Донбасская государственная машиностроительная академия, 1999.– С. 87 – 89.

2. Моделі і методи соціально-економічного прогнозування: Підручник / Геєць В. М., Клебанова Т. С., Черняк О. І. та ін.– Х. : ВД «ІНЖЕК», 2008.– 396 с.

3. Хохлов В. В. Прогнозирование финансового состояния предприятия на основе многомерного факторного анализа временных рядов / В. В.Хохлов, Е. И.Пискун // Бизнес Информ.– 2009.– № 2(1).– С. 82 – 87.

4. Хохлов В. В. Оценка значений факторов экономических процессов / В. В. Хохлов // Материалы Всеукраинской научно-практической конференции, Севастополь, 3 – 6 сентября 2009 г.– Севастополь : Изд-во СевНТУ, 2009. – С. 82 – 85.

5. Державна служба статистики України: Основні показники соціально-економічного розвитку України з 2004 по 2011 рр. [Електронний ресурс].– Режим доступу : http://www.ukrstat.gov.ua

6. Черняк О. І. Динамічна економетрика : Навчальний посібник / О. І. Черняк, А. В. Ставицький.– К. : КВІЦ, 2000.– 120 с.