

## РОЗШИРЕННЯ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА В УМОВАХ ЕКОЛОГІЧНОЇ ЗБАЛАНСОВАНOSTI

**ТАДЕЄВ Ю. П.**

*кандидат економічних наук*

**Київ**

**У**рахування фактора взаємодії економіки з зовнішнім навколишнім середовищем є однією з передумов повного та ґрунтового дослідження ринку загалом, і цінової політики, зокрема. Це стає особливо важливим для України при переході на сталий розвиток та у зв'язку з виконанням рішень Кіотського протоколу. При цьому створення економіко-математичних моделей для аналізу процесів еколого-економічної взаємодії є однією з головних задач.

Одним із можливих напрямків побудови еколого-економічних моделей є врахування екологічного фактора в економіко-математичних моделях. Продемонструємо даний підхід на прикладі моделі Леонт'єва «витрати-випуск», яка описується матричним рівнянням:

$$x = Ax + y, \quad y > 0, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  – вектор повного випуску продукції;  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  – вектор кінцевої продукції;

$A = (a_{ij})_1^n \geq 0$  – матриця коефіцієнтів прямих виробничих витрат продукції (технологічна матриця).

Разом з прямою моделлю матеріального балансу продукції розглядається двоїста модель цін на продукцію:

$$p = pA + r, \quad r > 0, \quad p \geq 0, \quad (2)$$

де  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  – вектор рівноважних цін на продукцію;  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  – вектор коефіцієнтів доданої вартості на продукцію.

Системи рівнянь (1) та (2) при умові, що матриця  $A \geq 0$  є нерозкладною і продуктивною (корінь Фробеніуса  $\gamma_A < 1$ ), мають розв'язки

$$x = (I - A)^{-1}y, \quad p = r(I - A)^{-1},$$

де  $I$  – одинична діагональна матриця. Отже, маємо

$$x = By, \quad p = rB, \quad (3)$$

де матриця повних витрат є невід'ємною:

$$B = (I - A)^{-1} \geq 0. \quad (4)$$

Модель Леонтьєва «витрати – випуск» можна перетворити на еколого-економічну модель, якщо врахувати екологічну складову. Таке розширення моделі є особливо актуальним через зобов'язання України за Кіотським протоколом.

**К**іотський протокол є першою міжнародною угодою, яка передбачає застосування ринкових механізмів міжнародного співробітництва для вирішення глобальних екологічних проблем, які отримали назву «гнучких механізмів». Це – спільне впровадження, механізм чистого розвитку, торгівля квотами на викиди. Дані механізми ґрунтуються на визнанні того, що прояви і наслідки зміни клімату не залежать від місця викидів парникових газів, і загальні витрати на скорочення цих викидів можуть бути мінімізовані в глобальному контексті.

Україна підписала Кіотський протокол 15 березня 1999 р., чим підтвердила послідовність своїх дій у вирішенні глобальних екологічних проблем і прихильність ідеям сталого розвитку. Наша держава тривалий час володіла значними можливостями для реалізації механізму торгівлі квотами і відповідну можливість забезпечення інвестиційних потреб свого паливно-енергетичного комплексу, оскільки рівень розвитку української економіки дозволяє експортувати квоти на викиди парникових газів і завдяки цьому вона могла б отримати значні кошти для додаткових інвестицій. Ринок торгівлі квотами, крім України, включає ще 39 країн (країни з додатка Б Кіотського протоколу), що можуть торгувати своїми квотами, які вони отримають за Кіотський протокол з моменту набуття ним чинності.

На жаль, 12 жовтня 2011 року Комітет з дотримання Кіотського протоколу прийняв рішення щодо України, яким тимчасово позбавив Україну можливості брати участь у фінансових механізмах, передбачених статтями 6, 12 та 17 Кіотського протоколу. Будемо сподіватись, що дане рішення щодо нашої країни вже в найближчому майбутньому буде переглянуто.

Розширимо модель (1) новим  $(n + 1)$ -м видом продукції  $x_{n+1}$  – парниковими газами (в еквіваленті  $\text{CO}_2$ ) та, відповідно, новою  $(n + 1)$ -ю галуззю, знищенням забруднень. Таке розширення відповідає умові екологічної збалансованості економіки.

Завдання полягає в тому, щоб ефективно переробити матрицю повних витрат у випадку зазначених

технологічних змін, пов'язаних із появою та функціонуванням нової галузі, яка здійснюватиме знищення парникових газів.

**Н**ехай матриця прямих витрат  $A$  набуває приросту  $\Delta A$ , завдяки чому матриця повних витрат  $B = (I - A)^{-1}$  набуває приросту  $\Delta B$ . Припускається, що матриці  $A$  та  $\Delta A$  є невід'ємними та продуктивними.

Формули для обчислення приросту мають вигляд [3]:

$$\Delta B = ((I - B\Delta A)^{-1} - I)B, \quad (5)$$

$$\Delta B = B((I - \Delta AB)^{-1} - I). \quad (6)$$

Розглянемо випадок розширення моделі Леонтьєва «витрати – випуск» ще одним продуктом (видом діяльності) під номером  $(n + 1)$  і відповідним новим технологічним способом під номером  $(n + 1)$ . Тоді замість моделі (1) маємо розширену модель:

$$x = Ax + ux_{n+1} + y, \quad y > 0, \quad x \geq 0, \quad x_{n+1} \geq 0, \quad (7)$$

$$x_{n+1} = vx + wx_{n+1} - y_{n+1}, \quad y_{n+1} > 0,$$

де  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \geq 0$  – вектор-стовпчик витрат кожного з видів продукції, які необхідні для знищення одиниці забруднення (парникових газів);

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \geq 0$  – вектор-рядок викидів парникових газів при виробництві одиниці кожного з видів продукції;  $0 \leq w < 1$  – викиди парникових газів при знищенні одиниці забруднень.

Знайдемо  $x_{n+1}$  з другого рівняння системи (7):

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-w}(vx - y_{n+1})$$

і підставимо його у перше рівняння системи (7). Отримаємо модель:

$$x = (A + \Delta A)x + (y + \Delta y), \quad (8)$$

де

$$\Delta A = \frac{uv}{1-w}, \quad \Delta y = -\frac{y_{n+1}}{1-w}u. \quad (9)$$

Будемо вважати при цьому, що матриці  $A$  та  $A + \Delta A$  є продуктивними. При цьому, очевидно,  $y + \Delta y > 0$ .

У роботі [5] для випадку, коли  $D$  – неособлива матриця, обернена для якої відома,  $u$  – деякий стовпчик,  $v$  – деякий рядок,  $C = D + uv$ , приводиться формула

$$C^{-1} = D^{-1} - \frac{1}{\gamma}D^{-1}uD^{-1}, \quad (10)$$

де  $\gamma = 1 + vD^{-1}u$ . При цьому припускається, що  $\gamma \neq 0$ .

У нашому випадку, коли  $I - A - \Delta A = I - A - \frac{uv}{1-w}$ ,  $u \geq 0, v \geq 0, 0 \leq w < 1$ ,

$B = (I - A)^{-1}$ ,  $B + \Delta B = \left( I - A - \frac{uv}{1-w} \right)^{-1}$ , з формули (10) випливає, що

$$\Delta B = \frac{BuvB}{1-w-vBu}. \quad (11)$$

У роботі [3] показано, що  $1 - w - \nu B_i > 0$  для про-  
дуктивних матриць  $A$  та  $A + \frac{uv}{1-w}$ .

Обчислення за формулою (11) здійснюється ефек-  
тивно за  $O(n^2)$  арифметичних операцій, якщо спочатку  
обчислити вектори  $B_i$  та  $\nu B$ , а потім знайти їх добуток  
 $B_i \cdot \nu B$ .

Проілюструємо дію даного алгоритму на прикладі  
даних економіки України за 2008 рік. За основу візьмемо  
агрегований до 15 галузей основного виробництва баланс  
[4]. Матрицю  $A$  для даного балансу подано в *табл. 1*.

Зазначимо, що у рядки *табл. 1* відповідають  
галузям-виробникам, а стовпці – галузям-споживачам.

Матрицю повних витрат  $B$  подано в *табл. 2* (зна-  
йдена засобами MathCad 15).

**Таблиця 1**

**Коефіцієнти технологічної матриці економіки України 2008 рік**

0,26	0,017	0,004	0,035	0	0,002	0,002	0,033	0	0	0,001	0,011	0,035	0,023	0,003
0	0,063	0,001	0	0	0	0	0,003	0	0	0	0	0,001	0,001	0
0,007	0,007	0,051	0,126	0,292	0,038	0,001	0,002	0,062	0	0,005	0,006	0,019	0,011	0,005
0,185	0,264	0,137	0,323	0,129	0,528	0,076	0,258	0,198	0,014	0,128	0,103	0,083	0,201	0,082
0,012	0,014	0,065	0,024	0,081	0,013	0,007	0,024	0,037	0,001	0,032	0,022	0,064	0,047	0,024
0,001	0,001	0,003	0,001	0,005	0,016	0,001	0,004	0,003	0	0,019	0,015	0,004	0,005	0,006
0,114	0,224	0,055	0,181	0,002	0,009	0,048	0,02	0,014	0,019	0,005	0,004	0,001	0,003	0,007
0,001	0,002	0,002	0,001	0,004	0,006	0,007	0,007	0,006	0,002	0,007	0,018	0,006	0,003	0,011
0,039	0,082	0,109	0,05	0,019	0,042	0,084	0,013	0,097	0,02	0,03	0,047	0,013	0,018	0,032
0,004	0,009	0,008	0,011	0,023	0,015	0,057	0,015	0,014	0,14	0,03	0,017	0,009	0,014	0,021
0,008	0,006	0,011	0,012	0,011	0,029	0,147	0,076	0,034	0,054	0,134	0,019	0,018	0,016	0,058
0	0,002	0,005	0,003	0,01	0,002	0,006	0,008	0,003	0,003	0,005	0,006	0,017	0,005	0,017
0	0	0	0	0,001	0	0,001	0	0,001	0	0,001	0,002	0,006	0,002	0,005
0	0	0,001	0	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001	0,002	0,002	0,003	0,001	0,002	0,002
0	0	0,001	0,001	0,002	0,002	0,012	0,023	0,002	0	0,014	0,013	0,014	0,009	0,167

**Таблиця 2**

**Коефіцієнти матриці повних витрат для економіки України 2008 рік**

Галузі- споживачі \ Галузі- виробники	1	2	3	4	5	6	7
1	1,376643	0,054993	0,023546	0,082903	0,020987	0,050748	0,015804
2	0,000127	1,06739	0,001242	0,000304	0,000464	0,000253	9,70E-05
3	0,100466	0,117717	1,14335	0,260756	0,406993	0,200199	0,053626
4	0,496679	0,593148	0,345904	1,686933	0,373001	0,960076	0,239992
5	0,048579	0,055539	0,10111	0,077496	1,135074	0,066601	0,032774
6	0,004736	0,005427	0,006333	0,00605	0,009181	1,021097	0,006448
7	0,268515	0,382111	0,138956	0,350425	0,102692	0,214265	1,106456
8	0,005771	0,008181	0,005872	0,007279	0,008075	0,011394	0,011211
9	0,129286	0,188626	0,17702	0,168629	0,108684	0,153912	0,13466
10	0,038001	0,053985	0,032469	0,056638	0,050231	0,054793	0,088299
11	0,075763	0,095688	0,054758	0,099866	0,05168	0,099086	0,206059
12	0,005182	0,008858	0,009738	0,010743	0,016188	0,009328	0,010207
13	0,00057	0,000791	0,000527	0,000775	0,001478	0,000608	0,001618
14	0,000822	0,001113	0,001798	0,001247	0,00205	0,002039	0,002023
15	0,006555	0,008955	0,005735	0,010065	0,006815	0,009618	0,02069

8	9	10	11	12	13	14	15
0,071034	0,022539	0,003768	0,018097	0,028541	0,05936	0,05142	0,018584
0,003343	0,000204	3,08E-05	0,000118	0,000135	0,001189	0,001191	0,000128
0,095465	0,158004	0,014833	0,0734	0,059379	0,080427	0,093416	0,061246
0,514343	0,434229	0,066136	0,31618	0,247947	0,216866	0,397957	0,244077
0,057907	0,074412	0,009287	0,060407	0,042395	0,087581	0,075252	0,051504
0,008618	0,006735	0,002039	0,024391	0,01751	0,006566	0,007736	0,010862
0,137073	0,113325	0,038415	0,07583	0,061264	0,056421	0,093126	0,064321
1,011199	0,009844	0,003718	0,010778	0,020543	0,008556	0,005852	0,016242
0,079533	1,168281	0,038602	0,078692	0,085421	0,050124	0,069722	0,078094
0,04323	0,039052	1,170408	0,055442	0,033224	0,023893	0,034361	0,044832
0,130466	0,07852	0,082987	1,183951	0,046718	0,042416	0,049328	0,10496
0,013228	0,007826	0,004757	0,009309	1,009053	0,020359	0,008946	0,023734
0,000608	0,001498	0,000197	0,001544	0,002369	1,006417	0,002396	0,006415
0,002861	0,001818	0,002642	0,002893	0,003541	0,001541	1,002581	0,003092
0,033418	0,007102	0,002374	0,022351	0,018778	0,019714	0,014301	1,204835

У роботі [4] обчислені коефіцієнти матриці витрат продукції кожної з 15 галузей на одиницю утилізації парникових газів, а саме CO<sub>2</sub>. У наших позначеннях матимемо:  $u = (0,094, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ .

У цій же роботі знайдені коефіцієнти матриці об'ємів емісій на одиницю виготовленої продукції кожної з 15 галузей:  $v = (0,045, 0,038, 0,085, 0,135, 0,031, 0,021, 0,001, 0,004, 0,09, 0,002, 0,007, 0,032, 0,014, 0,019, 0,01)$ .

Коефіцієнт об'ємів емісій CO<sub>2</sub> на одиницю утилізації CO<sub>2</sub> візьмемо рівним  $w = 0,15695$  [4].

Добутки матриць, які фігурують в (11) знайдемо за допомогою MathCad 15. Виконавши всі необхідні обчислення матрицю приросту  $\Delta B$  запишемо в табл. 3:

Зазначимо, що дане розширення має суттєву перевагу, зокрема, перед моделлю Леонтьєва-Форда у тому, що не потребує складання додаткового балансу.

## ВИСНОВОК

У статті запропоноване розширення моделі Леонтьєва «витрати – випуск», яке відображає одну з головних умов екологічної збалансованості економіки. Для такого розширення запропонований ефективний алгоритм заходження розв'язку прямої та двоїстої задач, який заснований на результатах з теорії обернення спеціальних матриць. ■

## ЛІТЕРАТУРА

1. Леонтьев В. Межотраслевая экономика.– М. : Экономика, 1997.– 479 с.
2. Леонтьев В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика : Пер. с англ.– М. : Политиздат, 1990.– 415 с.

Таблиця 3

Коефіцієнти матриці приросту повних витрат для економіки України 2008 рік

0,0237	0,0240	0,0258	0,0426	0,0207	0,0293	0,0085	0,0150	0,0284	0,0027	0,0107	0,0128	0,0096	0,0145	0,0096
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0017	0,0017	0,0019	0,0031	0,0015	0,0021	0,0006	0,0011	0,0021	0,0002	0,0008	0,0009	0,0007	0,0011	0,0007
0,0086	0,0086	0,0093	0,0154	0,0075	0,0106	0,0031	0,0054	0,0102	0,0010	0,0038	0,0046	0,0035	0,0052	0,0035
0,0008	0,0008	0,0009	0,0015	0,0007	0,0010	0,0003	0,0005	0,0010	0,0001	0,0004	0,0005	0,0003	0,0005	0,0003
0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0046	0,0047	0,0050	0,0083	0,0040	0,0057	0,0017	0,0029	0,0055	0,0005	0,0021	0,0025	0,0019	0,0028	0,0019
0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000
0,0022	0,0023	0,0024	0,0040	0,0019	0,0028	0,0008	0,0014	0,0027	0,0003	0,0010	0,0012	0,0009	0,0014	0,0009
0,0007	0,0007	0,0007	0,0012	0,0006	0,0008	0,0002	0,0004	0,0008	0,0001	0,0003	0,0004	0,0003	0,0004	0,0003
0,0013	0,0013	0,0014	0,0023	0,0011	0,0016	0,0005	0,0008	0,0016	0,0001	0,0006	0,0007	0,0005	0,0008	0,0005
0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000

**3. Ляшенко І. М., Тадесв Ю. П.** Динамічні функції випуску та ціни продукції на основі міжгалузевої моделі Леонт'єва «витрати – випуск» // Вісник НУВГП. Економіка: збірник наукових праць.– Рівне : НУВГП, 2011.– № 3(55).– С. 201 – 207.

**4. Онищенко І. М.** Порівняльний аналіз економік на основі результатів агрегування цінами моделі Леонт'єва «витрати – випуск» // Економіст.– 2010.– № 9.– С. 54 – 56.

**5. Waugh F. V., Dwyer P. S.** Compact computation of the inverse of a matrix. Ann. Math. Statistics, 1945, 16, 259 – 271; M. R., 7, 218.

---