УДК 330.4; 330.46

ВЛИЯНИЕ ПОСРЕДНИКОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РЫНКА

КЛОКОВ В. И.
доктор физико-математических наук
Санкт-Петербург (Россия)

В условиях российского рынка, когда между потребителем и производителем товара часто возникает длинная цепочка посредников, важно представлять возможные последствия этого явления. Для оценки влияния посредников на динамику цен в условиях российского рынка построим математические модели динамики цен, основанные на так называемой «паутинообразной» модели рынка [1; 2; 3; 4].

Параметрами, описывающими состояние рынка, будут: X_t – цена товара в момент времени t, S_t – предложение товара в момент t, D_t – спрос на товара в момент времени t. Допустим, что имеется один товар, и функция предложения S_t и спроса D_t на него зависит только от его цены. Все остальные факторы (цены на замещающие товары, основные производственные фонды, характер применяемой технологии, налоги и дотации, природно-климатические условия), от которых зависит предложение и спрос на данный товар, остаются неизменными. Таким образом, рассматривается однопродуктная модель рынка.

В простейшем случае можно предположить, что предложение S зависит только от цены X товара и является возрастающей функцией от цены, и спрос D зависит только от цены X товара и является убывающей функцией от цены. В окрестности положения равновесия эти функции можно линеаризовать. Таким образом, функции предложения S и спроса D будут линейной возрастающей и линейной убывающей функцией цены соответственно:

$$\begin{aligned} S &= a \cdot X + b \\ D &= -c \cdot X + d, \end{aligned} \quad (1)$$

где $a > 0$ – определяет скорости возрастания предложения при увеличении цены;

$c > 0$ – определяет скорости убывания спроса при увеличении цены;

начальные параметры $b > 0$ и $d > 0$ – удовлетворяют условию $d > b$.

Рассмотрим дискретную модель, наиболее адекватно описывающую динамику цен. Шаг Δt по времени t примем за единицу измерения времени, т. е. $\Delta t = 1$, при этом частота дискретизации f_d будет равна единице $f_{d.} = 1/\Delta t = 1$. Дискретные модели динамики цен в отличие от непрерывных моделей позволяют учесть процедуры принятия решений. Динамика цен включает взаимодействие трех подсистем: товаропроизводитель, потребитель и рынок. Рассмотрим два варианта процедуры принятия решений.

Вариант I. Товаропроизводитель, принимая решение об объеме предложения, ориентируется на цену предыдущего периода. Он осуществляет простейший прогноз цены, считая, что за промежуток времени от начала выпуска продукции до ее реализации посредникам цена практически не изменится и будет равной X_{t-1}. Потребитель предъявляет спрос и покупает товар по современной цене X_t. Рынок всегда находится в состоянии, близком к локальному равновесию. Математически это запишется так:

$$\begin{aligned} S_t &= a \cdot X_{t-1} + b; \\ D_t &= -c \cdot X_t + d; \\ D_t &= S_t. \end{aligned} \quad (2)$$

Из условия равновесия рынка (спрос равен предложению $D_t = S_t$) получим неоднородное разностное уравнение, описывающее динамику цены:

$$c \cdot X_t + a \cdot X_{t-1} = d - b. \quad (3)$$

Общее решение неоднородного разностного уравнения складывается из общего решения однородного разностного уравнения и частного стационарного решения. Частное стационарное решение получается из (3) в предположение, что постоянно X_t:

$$X_p = \frac{d-b}{a+c}. \tag{4}$$

Цена X_p является положением равновесия разностного уравнения и соответствует равновесию на рынке. Переходные процессы ценообразования, устойчивость или неустойчивость положения равновесия определяется видом общего решения однородного разностного уравнения:

$$c \cdot X_t + a \cdot X_{t-1} = 0. \tag{5}$$

Общее решение однородного разностного уравнения ищется в виде $X_t = \lambda^t$. Из (5) получим характеристическое уравнении для определения λ:

$$c \cdot \lambda + a = 0; \Rightarrow \lambda = -\frac{a}{c}. \tag{6}$$

Тогда общее решение неоднородного разностного уравнения, описывающее динамику цены, будет иметь вид:

$$X_t = A \cdot \left(-\frac{a}{c}\right)^t + X_p, \tag{7}$$

где A – произвольная постоянная, которая при начальных условиях $t=0$, $X_t = X_0$ из (7) будет равна $A = X_0 - X_p$. Окончательно решение неоднородного разностного уравнения с начальными условиями, описывающее динамику переходных процессов на рынке, имеет вид:

$$X_t = (-1)^t \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^t \cdot (X_0 - X_p) + X_p. \tag{8}$$

Следовательно,

- если $|\lambda| < 1$ или $a < c$, то равновесная цена X_p асимптотически устойчива в целом, т. е. при любой начальной цене X_0 цена X_t стремится к равновесной цене X_p. При этом цена X_t совершает периодические затухающие колебания относительно равновесной цены X_p. Условие $a < c$ означает, что скорость предложения товара больше скорости убывания спроса на товар при росте цен X;
- если $|\lambda| < 1$ или $a > c$, то равновесная цена X_p не устойчива, точнее, при любой начальной цене X_0 цена X_t уходит от равновесной цены X_p. При этом цена X_t совершает периодические колебания относительно равновесной цены X_p с возрастающей амплитудой. Условие $a > c$ означает, что скорость предложения товара меньше скорости убывания спроса товара при росте цен;
- если $|\lambda| = 1$ или $a = c$, то равновесная цена X_p устойчива. При этом цена X_t совершает периодические колебания с постоянной амплитудой относительно равновесной цены X_p. Условие $a = c$ означает, что скорость предложения товара равна скорости убывания спроса товара при росте цен X.

Для принятия решений во втором варианте делаются следующие предположения.

Вариант II. Спрос запаздывает от предложения на один период. При определении объема предложения в каждый период времени товаропроизводитель ориентируется на спрос в предыдущий период. Цена предлагаемого товара устанавливается товаропроизводителем на уровне, определяемом в соответствии с функцией предложения. Объем потребления товара не может превосходить ни объема предложения, ни объема спроса. Это означает, что если предложение меньше спроса, то потребление равно предложению. Математически это запишется так:

$$\begin{aligned} S_t &= a \cdot X_t + b \\ D_t &= -c \cdot X_{t-1} + d; \\ D_t &= S_t. \end{aligned} \tag{9}$$

Аналогично предыдущему варианту из условия равновесия рынка получим неоднородное разностное уравнение, описывающее динамику цены:

$$a \cdot X_t + c \cdot X_{t-1} = d - b. \tag{10}$$

Аналогично же предыдущему варианту общее решение неоднородного разностного уравнения получается из (9) в виде:

$$X_t = (-1)^t \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^t \cdot (X_0 - X_p) + X_p, \tag{11}$$

где параметры a и c поменялись местами в решении (8), а положение равновесия из (4) осталось прежним X_p. Соответственно, в признаках устойчивости положения равновесия X_p нужно также поменять местами параметры a и c.

Оценим теперь влияние посредников на динамику цен. При наличии посредников возникает разница в ценах для производителя и потребителя, которая достается посреднику. Пусть X – стоимость товара для производителя. Пусть k – торговая наценка, r – наценка одного посредника, n – число посредников. Тогда, стоимость товара для потребителя будет равна

$$\bar{X} = (1+r)^n \cdot (1+k) \cdot X. \tag{12}$$

Система разностных уравнений для **Вариант I** процедуры принятия решения будет иметь вид

$$\begin{aligned} S_t &= a \cdot X_{t-1} + b \\ D_t &= -c \cdot (1+r)^n \cdot (1+k) \cdot X_t + d; \\ D_t &= S_t. \end{aligned} \tag{13}$$

Система разностных уравнений сводится к одному уравнению

$$c \cdot (1+r)^n \cdot (1+k) \cdot X_t + a \cdot X_{t-1} = d - b. \tag{14}$$

Решение этой системы будет совпадать с приведенным выше решением (4) и (8), если в нем заменить c на $(1+r)^n \cdot (1+k) \cdot c$. Это решение будет иметь вид

$$X_t = (-1)^t \cdot \left(\frac{a}{(1+r)^n \cdot (1+k) \cdot c}\right)^t \cdot (X_0 - X_p) + X_p \tag{15}$$

где $X_p = \dfrac{d-b}{a + (1+r)^n \cdot (1+k) \cdot c}$.

Система разностных уравнений для **Вариант II** будет иметь вид

$$S_t = a \cdot X_t + b$$
$$D_t = -c \cdot (1+r)^n \cdot (1+k) \cdot X_{t-1} + d; \quad (16)$$
$$D_t = S_t.$$

Система разностных уравнений сводится к одному уравнению

$$a \cdot X_t + c \cdot (1+r)^n \cdot (1+k) \cdot X_{t-1} = d - b. \quad (17)$$

Решение этой системы будет совпадать с приведенным выше решением (4) и (11), если в нем заменить c на $(1+r)^n \cdot (1+k) \cdot c$. Это решение будет иметь вид

$$X_t = (-1)^t \cdot \left(\frac{(1+r)^n \cdot (1+k) \cdot c}{a} \right)^t \cdot (X_0 - X_p) + X_p, \quad (18)$$

где $X_p = \dfrac{d-b}{a + (1+r)^n \cdot (1+k) \cdot c}$.

Из полученных решений видно, что для обоих вариантов равновесная цена совпадает. Однако переходные процессы существенно различаются. Для первого варианта параметр λ, определяющий степень устойчивости равен

$$\lambda = \frac{a}{(1+r)^n \cdot (1+k) \cdot c}. \quad (19)$$

При наличии посредников и увеличении их числа этот параметр уменьшается и тем самым делает более устойчивым положение равновесия X_p, т. е. обеспечивает быстрое завершение переходных процессов в динамической системе. В этом случае возможен переход от неустойчивости к устойчивости. Наличие посредников является стабилизирующим фактором.

Для первого варианта процедуры принятия решения на *рис. 1* представлен пример появления устойчивости положения равновесия при увеличении доли цены товара, получаемой посредниками. При отсутствии посредников на рынке равновесная цена равна X_p = 15, и эта цена неустойчива для первого варианта способа принятия решений. Появление посредников приводит к падению цены товара для производителя. Эластичность падения спроса по цене растет от 0,6 до 2. При этом эластичность предложения по цене растет от 1,2 до 1,4. Равновесная цена падает до X_p = 9 и приобретает устойчивость.

Для второго варианта картина обратная. Параметр λ, определяющий степень устойчивости, равен

$$\lambda = \frac{(1+r)^n \cdot (1+k) \cdot c}{a}. \quad (20)$$

При наличии посредников параметр λ увеличивается и тем самым делает динамическую систему менее устойчивой, что может привести к переходу от устойчивости к неустойчивости положения равновесия X_p при увеличении числа посредников.

На *рис. 2* представлен пример потери устойчивости положения равновесия при увеличении доли цены товара получаемой посредниками. При отсутствии посредников на рынке устанавливается равновесная цена X_p = 15, и эта цена устойчива. Появление посредников приводит к падению цены товара для производителя. Равновесная цена падает до X_p = 9 и теряет устойчивость.

На рис. 1 и 2, иллюстрирующих поведение динамических систем, движение по спирали происходит в противоположных направлениях. В первом варианте вращение по часовой стрелке. Во втором варианте ориентация вращения противоположная.

Существование на рынке посредников и какие-либо другие причины могут приводить к увеличению времени запаздывания при принятии решений. В частности, экспериментально на основе анализа временных финансовых рядов показано наличие эффектов длинной памяти в сделках купли-продажи [5; 6]. Оценим

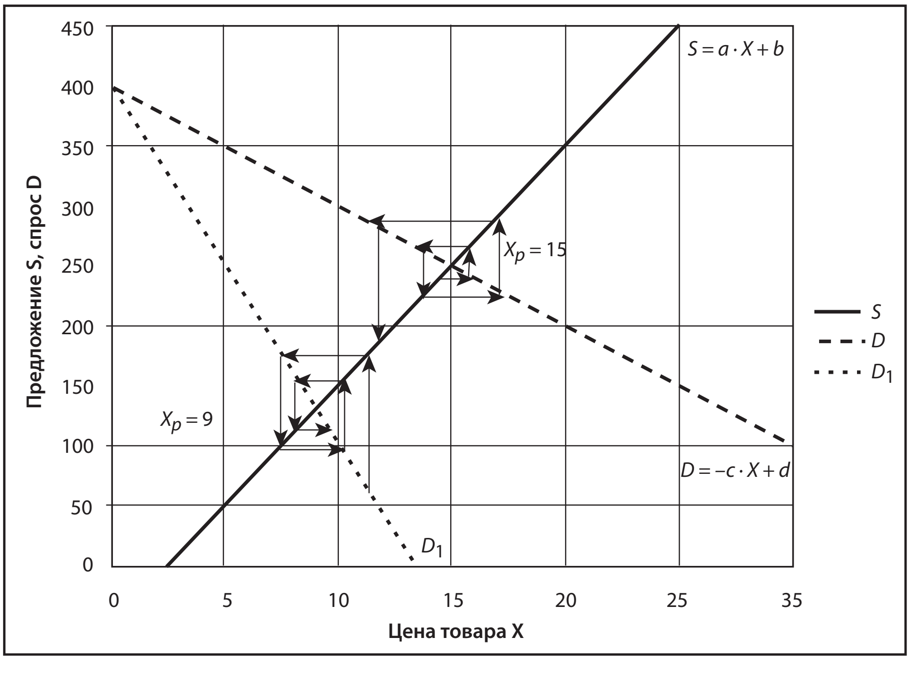

Рис. 1. Приобретение устойчивости положения равновесия при наличии посредников

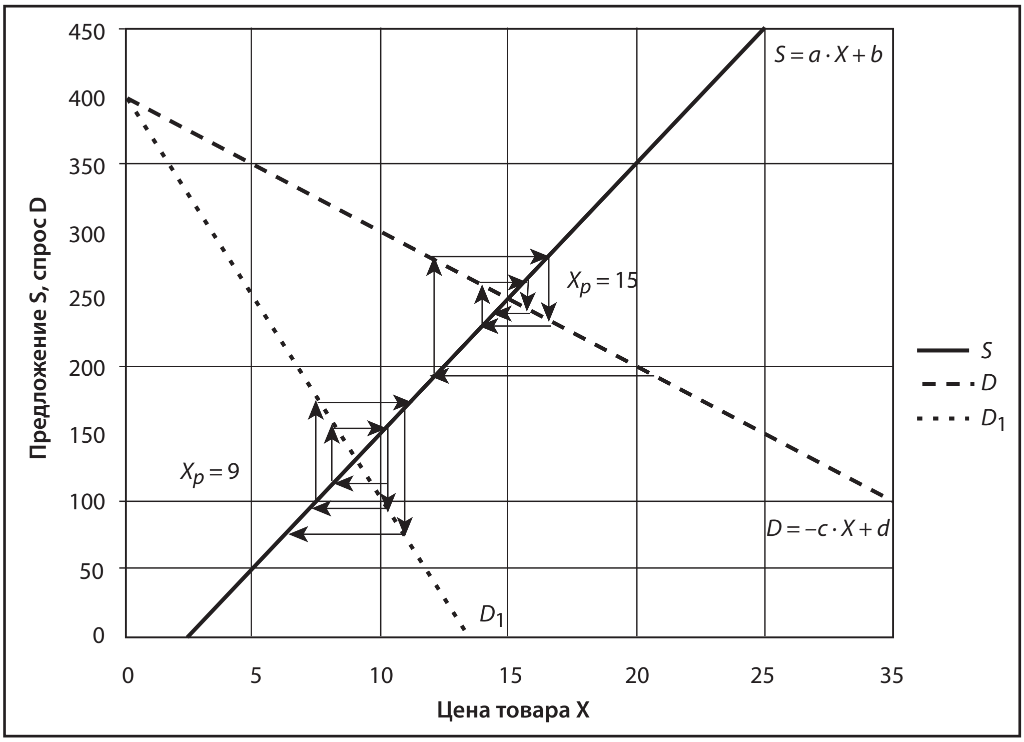

Рис. 2. Потеря устойчивости положения равновесия при наличии посредников

влияние увеличения времени запаздывания на динамику. Для **Варианта II** из (5) при времени задержки *n* простейшая модель переходных процессов на рынке будет описываться однородным разностным уравнением

$$c \cdot X_t + a \cdot X_{t-n} = 0\,. \qquad \textbf{(21)}$$

Находим *n* корней характеристического уравнения

$$\lambda_k = \alpha_k \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \textbf{(22)}$$

где $\alpha_k = e^{\frac{i \cdot (2 \cdot k+1) \cdot \pi}{n}}$ – корень n-ой степени из –1; $k = 0, 1, \ldots n-1$; i – мнимая единица.

Если время запаздывания *n* увеличивается, то модуль корней характеристического уравнения увеличивается при $\frac{a}{c} < 1$ и уменьшается при $\frac{a}{c} > 1$. В пределе при $n \to \infty$ модуль $\lambda k \to 1$. Следовательно, все переходные процессы замедляются, как стремление цены к равновесной ($X_t \to X_p$ при $t \to \infty$) в случае асимптотической устойчивости, так и уход от положения равновесной цены в случае неустойчивости.

Оценим частотные характеристики динамики рынка. На вход динамической системы направим единичный гармонический сигнал $e^{i \cdot \omega \cdot t}$ и определим отклик системы:

$$c \cdot X_t + a \cdot X_{t-n} = e^{i \cdot \omega \cdot t}.$$

Решение ищем в виде $X_t = Q \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$. После подстановки получим

$$(c + a \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot n}) \cdot Q = 1.$$

Отсюда, отклик динамической системы

$$Q(\omega) = \frac{1}{c + a \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot n}} = \frac{1}{c + a \cdot \cos n\omega - i \cdot a \cdot \sin n\omega}.$$

Амплитудочастотная характеристика (АЧХ) динамической системы равна модулю отклика $H(\omega) = |Q(\omega)|$:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos n\omega}}. \qquad \textbf{(23)}$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) равна аргументу отклика $F(\omega) = \arg(Q(\omega))$:

$$F(\omega) = arctg\left(\frac{-a \cdot \sin n\omega}{c + a \cdot \cos n\omega}\right). \qquad \textbf{(24)}$$

Расчет показывает, что АЧХ и ФЧХ сильно зависят от времени запаздывания *n* (*рис. 3*).

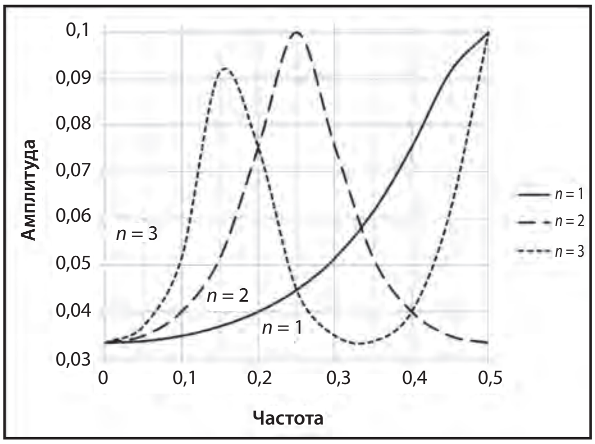

Рис. 3. Зависимость АЧХ динамических систем от запаздывания *n*

Для первого и второго варианта АЧХ совпадают. Длительность запаздывания на низких частотах слабо

ЕКОНОМІКА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ влияет на амплитуду. На более высоких частотах разница возрастает, чем больше частота, тем больше амплитуда.

Фазовые характеристики для первого и второго варианта существенно различаются (см. *рис. 4, 5*).

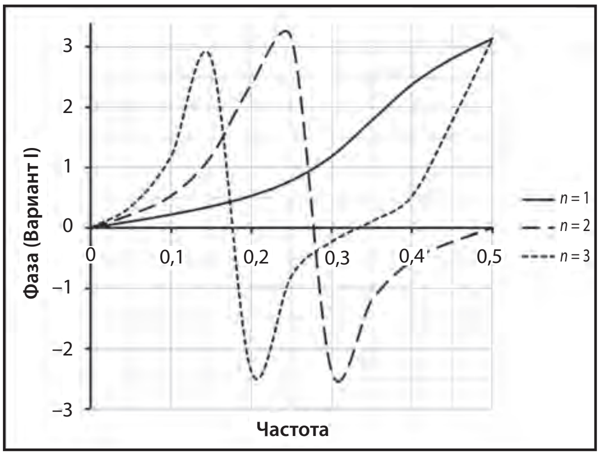

Рис. 4. Зависимость ФЧХ от запаздывания *n*

Таким образом, «невидимая рука рынка» далеко не всегда обеспечивает устойчивость рынка. В ряде случаев механизмы рыночного саморегулирования не могут сделать устойчивым равновесное состояние, и требуются административные управленческие усилия для переходов от одной стратегии к другой и за счет этого стабилизации рынка. Возможно, устойчивость рынка улучшится, если в модели при принятии решения учесть более длинный ряд прошлых цен на товар.

Представленные модели рынка можно отнести к структурно устойчивым математическим моделям [7]. При малом нелинейном возмущении модели рынка динамика цен качественно остается неизменной. ■

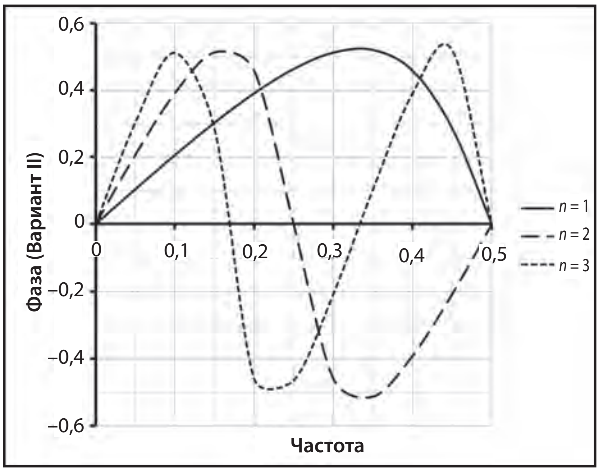

Рис. 5. Зависимость ФЧХ от запаздывания *n*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Прасолов А. В.** Математические методы экономической динамики.– СПб.: Лань, 2008.
2. **Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришкин И. М.** Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики.– М.: Юрайт, 2010.
3. **Rosser M.** Basic mathematics for economists.– L.; N.Y.: Routledge, 2003.
4. **Лебедев В. В.** Математическое моделирование социально-экономических процессов.– М.: Изограф, 1997
5. **Bouchaud J.-F., Farmer J. D., Lillo F.** How Markets Slowly Digest Changes in Supply and Demand // Handbook of Financial Markets: Dynamics and Evolution / T. Hens, K. Schenk-Hoppe (eds.). Elsevier: Academic Press, 2008.
6. **Леонидов А.** Путь к экономическому равновесию и эффективность финансовых рынков: взгляд физика // Вопросы экономики.– 2009.– № 11.– С. 82 – 89.
7. **Арнольд В. И.** «Жесткие» и «мягкие» математические модели // Математики и общество. Математическое образование на рубеже веков: Материалы Всероссийской конференции.– Дубна, 18 – 22 сентября 2000 г.