

## НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА ПРОЦЕСУ ФУНКЦІОНУВАННЯ КОМЕРЦІЙНОГО БАНКУ НА ПІДГРУНТІ НЕПЕРЕРВНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

**ВІТЛІНСЬКИЙ В. В.**

*доктор економічних наук*

**КОЛЯДА Ю. В.**

*кандидат фізико-математичних наук*

**ХАРЛАМОВ А. О.**

**Київ**

С трижем фінансово-кредитної складової держави є банківська система, яка забезпечує економіку необхідними фінансовими ресурсами. Стабільне функціонування банківської системи детермінує розвиток економіки.

Функціонування та розвиток банківських установ відбувається в досить складних умовах, що пояснюється, на нашу думку, перманентною глибокою трансформацією банківського сектора і недостатнім досвідом діяльності українських банків у подоланні наслідків світової фінансово-економічної кризи. Загалом це проявляється у хибних управлінських рішеннях та їх негативних наслідках. За вказаних умов єдино можливим виходом заповнення відсутності емпіричного досвіду ефективної діяльності банку, усуваючи можливі помилкові рішення, є використання теорії та методології економіко-математичного моделювання, розглядаючи банківську установу як складну нелінійну динамічну систему. Слід наголосити, що за результатами комп'ютерного моделювання динаміки банку будуються: а) сценарії розвитку подій з плином часу – має місце горизонт прогнозування для тих чи інших умов; б) фазові портрети, що відображають взаємозалежності між складовими елементами банківського механізму у числовому вимірі; в) структурний і параметричний портрети математич-

ної моделі банку, які відображають графічно якісну поведінку складових банківського механізму залежно від коефіцієнтів моделі.

Отже, проблема математичного моделювання динаміки діяльності банку, яка складається з побудови адекватної системи моделей та якісного і кількісного аналізу, наразі є нагальною, оскільки її вдале розв'язання сприяє апріорному оцінюванню фінансової стабільності та прогнозування шляхів досягнення найкращих показників функціонування банку.

Традиційно в дослідженні банківської діяльності преважують методи економетричного моделювання [5]. Авторам відома лише одна праця [3], присвячена розробленню і використанню динамічної моделі банку. Слід зауважити, що математичний опис функціонування банківського механізму й апріорне пізнання його можливостей є досить перспективним, могутнім засобом [6]. Такий підхід відповідає магістральній тенденції у моделюванні проблем природознавства, техніки.

Основний результат вищезгаданої праці [3] являє собою лінійну динамічну точкову модель – лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з початковими умовами. Але на сьогодні лінійна парадигма себе вичерпала. Усе економічне буття є нелінійним: складові елементи економічної системи, взаємодії та взаємовпливи між ними нелінійні, інтенсивні, лавиноподібного характеру. Отже, адекватні математичні моделі, що претендують на відтворення динамічної природи банківської діяльності, також мають бути нелінійними.

Проблема формалізації функціонування банку та математичного опису динаміки його діяльності є досить складною та актуальною. До її вирішення тільки тепер підійшли впритул, ґрунтуючись на засадах синергетики і теорії адаптації [4].

Метою статті є розроблення нелінійної точкової, тобто динамічної і неперервної, моделі банківського механізму, її всебічне (аналітичне, якісне і кількісне) дослідження, демонструючи ефективність математичного моделювання для стратегії планування й тактики управління банківською діяльністю.

Банківський механізм (рис. 1) складають такі елементи:

- ✦ *кредитно-інвестиційний портфель банку* (включає міжбанківські кредити, цінні папери, кредити фізичних та юридичних осіб);
- ✦ *депозитний портфель банку* (включає депозити фізичних та юридичних осіб);
- ✦ *капітал банку* (формується у вигляді доходів, які отримує банк від власної операційної діяльності);
- ✦ *фінансовий результат* – результуючий показник діяльності банку.

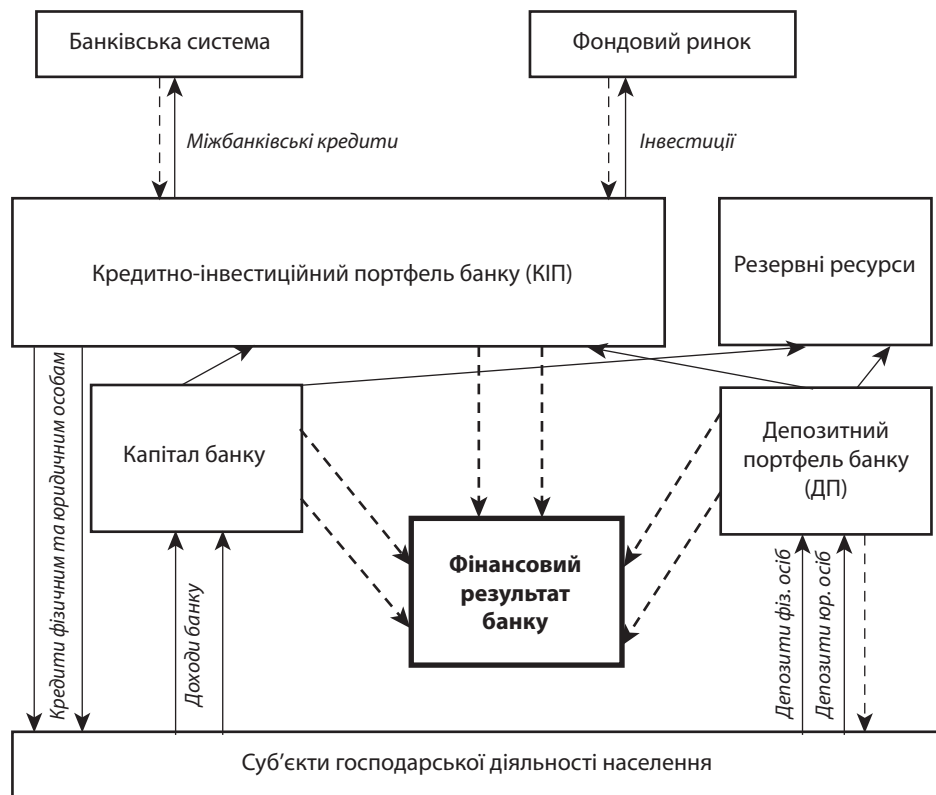


Рис. 1. Механізм функціонування комерційного банку

У процесі діяльності банк формує свої активи за рахунок залучених коштів (депозитний портфель) і капіталу банку (доходи від операційної діяльності), у результаті чого утворюється кредитно-інвестиційний портфель банку як основне джерело прибутків банку (доходи від кредитування та інвестиційної діяльності). Резерви банку формуються відповідно до норми обов'язкового резервування, яка встановлюється НБУ.

На фінансовий результат банку, що виокремлюється з рис. 1, впливають такі операції (фактори) (рис. 2).

Зазначені фактори є підґрунтям формування депозитного та кредитно-інвестиційного портфелів банку. Таким чином, висловлюється припущення, що дані портфелі визначально впливають на функціонування банківського механізму в цілому.

Будемо розглядати банківський механізм як нелінійну динамічну систему зі змінними  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ , кожна з яких відповідає вищезгаданім факторам, причому значення цих величин у початковий момент часу відомі та задають початковий стан системи (стартові умови). Тоді банківський механізм описується системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)), \quad j = \overline{1, N} \quad (1)$$

з початковими умовами  $x_j(t_0) = x_{j0}$ , тобто має місце задача Коші, де права частина  $f_j(\bullet)$  відтворює взаємозв'язки і взаємовпливи між складовими банку.

Розв'язок математичної моделі (1) дає змогу визначити стійкість банківської системи в кожній її особливій точці (похідні  $\frac{dx_j}{dt} = 0$ ) та відповідає руху точки

у  $N$ -вимірному фазовому просторі  $R^n(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , тобто економічній еволюції банку.

Скориставшись фундаментальними принципами побудови рівнянь економічного стану [4], економіко-математична модель нелінійної динаміки банківського механізму з урахуванням впливу трьох факторів набуває вигляду системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(t) + x_1(t)x_3(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(t) + x_2(t)x_3(t) \\ \frac{dx_3}{dt} = A \cdot x_2(t)x_1(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_1x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_2x_3 \\ \dot{x}_3 = A \cdot x_2x_1 \end{cases}, \quad (2)$$

де змінна  $x_1(t)$  описує обсяг кредитно-інвестиційного портфеля банку;  $x_2(t)$  – депозитного портфеля банку;  $x_3(t)$  – фінансового результату банку; стала  $A$  відображає ступінь взаємодії вибраних факторів, яким обумовлений остаточний результат.

Використання моделі дозволяє надати рекомендації щодо підвищення ефективності функціонування банку за рахунок створення раціональної структури кредитно-інвестиційного та депозитного портфелів. Можливість адаптації моделі до зовнішнього середови-

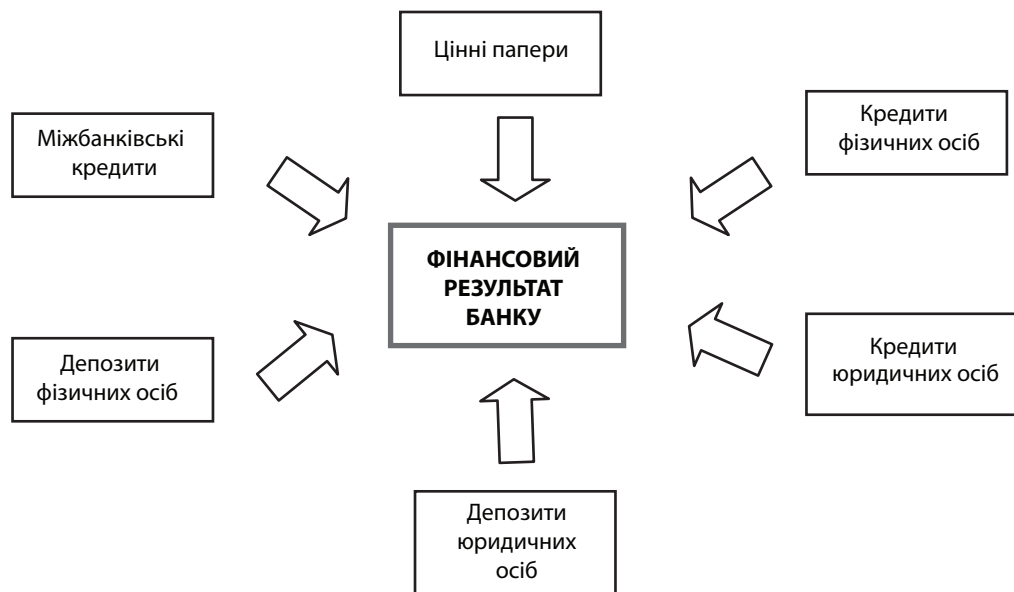


Рис. 2. Фактори, що впливають на фінансовий результат банку

В основу даної моделі було покладено гіпотезу: приймається, що дана структура моделі цілком відображає пропорційність відношення між депозитним, кредитно-інвестиційним портфелями та фінансовим результатом банку та мала місце саме така кластеризація факторів (див. рис. 2).

Нелінійна математична модель (2) динаміки банку відноситься до сімейства моделей синергетичної економіки [1]. Будучи достатньо простою, зазначена множина моделей охоплює все варте уваги у моделюванні динамічних траєкторій економічного розвитку.

**Аналітичне дослідження** моделі (2). Поділивши перше рівняння на третє отримаємо:  $\frac{dx_1}{dx_3} = \frac{1+x_3}{Ax_2}$ ,

звідси матимемо:

$$Ax_2 dx_1 = (1+x_3) dx_3. \quad (3)$$

Поділивши друге рівняння на третє, отримаємо

$$\frac{dx_2}{dx_3} = \frac{1+x_3}{Ax_1}, \text{ звідси}$$

$$Ax_1 dx_2 = (1+x_3) dx_3. \quad (4)$$

З рівностей (3) і (4), випливає звичайне диференціальне рівняння  $x_2 dx_1 = x_1 dx_2$ , розв'язок якого очевидний і записується:

$$x_1 = Cx_2, \quad (5)$$

де  $C$  – константа інтегрування.

Остання рівність свідчить про існування лінійної залежності між кредитно-інвестиційним і депозитним портфелями.

**Зауваження.** Аналітично встановлена лінійна залежність між змінними  $x_1$  і  $x_2$  узгоджується зі статистичними даними [7] функціонування «Брокбізнесбанку» (рис. 3).

та і внутрішньої політики банку дає змогу використовувати модель для прогнозування можливих сценаріїв розвитку банку.

На підґрунті (5) має місце вираз  $dx_1 = Cdx_2$ , підстановкою якого у рівняння (4) отримується звичайне

диференціальне рівняння:  $x_1 \cdot \frac{A}{C} dx_1 = dx_3 + x_3 dx_3$ , розв'язком якого є:

$$\frac{A}{2C} x_1^2 = x_3 + \frac{x_3^2}{2} + K \Leftrightarrow \frac{A}{C} x_1^2 = (x_3 + 1)^2 + (2K - 1), \quad (6)$$

де  $K$  – константа інтегрування.

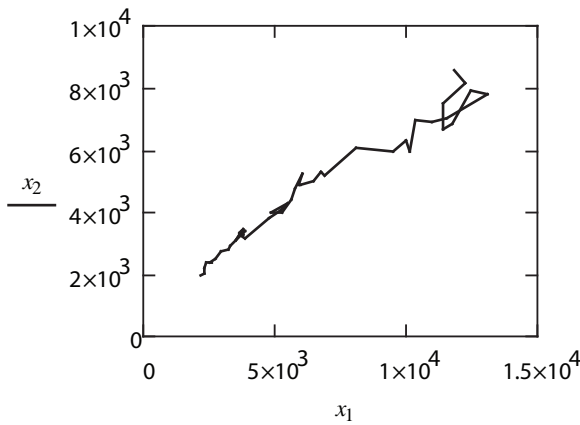
Після очевидних алгебраїчних перетворень отримується канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x_1^2}{\frac{C}{A}(2K-1)} - \frac{(x_3+1)^2}{2K-1} = 1 \quad (7)$$

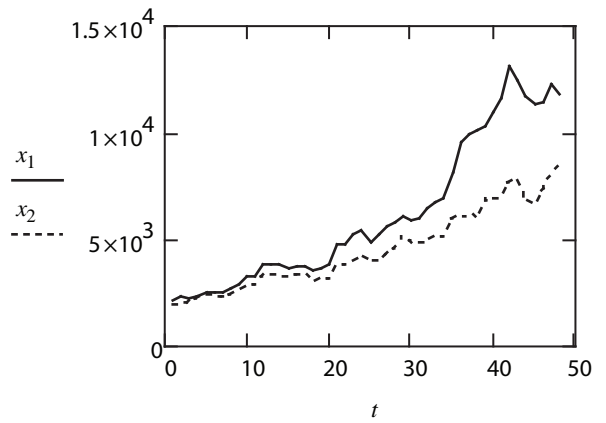
з напіввісями  $a = \sqrt{\frac{C}{A}(2K-1)}$  і  $b = \sqrt{2K-1}$  у стандартних позначеннях.

Графік рівняння (7) має такий вигляд (рис. 4).

Спостерігається гіперболічна залежність, де координата точки  $P$  відповідає найменшому обсягу величини кредитно-інвестиційного портфелю (КІП), коли починається процес накопичення фінансових результатів банку. Саме при даному обсягу КІП варто започаткувати справу. Підсилення умови зумовлюється розташуванням центру гіперболи у точці  $(0; -1)$ .



а)



б)

Рис. 3: а) взаємозалежність змінних  $x_1$  і  $x_2$ ; б) щомісячні числові значення змінних  $x_1$  і  $x_2$  [7]

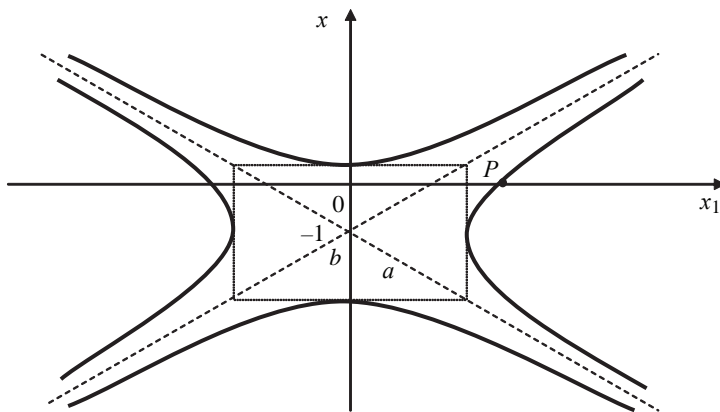


Рис. 4. Геометричне зображення рівняння (7)

Підставляючи вираз (5) у третє рівняння математичної моделі (2), отримуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{A}{C} x_1^2(t).$$

Скориставшись виразом (6), остаточно приходимо до диференціального рівняння:

$$\frac{dx_3}{dt} = (x_3 + 1)^2 + (2K - 1),$$

і записується:  $\frac{1}{\sqrt{2K-1}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x_3+1}{\sqrt{2K-1}}\right) = t + C_2$ , де

$C_2$  – стала інтегрування. Після очевидних перетворень остаточно маємо вираз:

$$x_3 = \sqrt{2K-1} \cdot \operatorname{tg}\left[\sqrt{2K-1}(t + C_2)\right] - 1, \quad (8)$$

який відтворює динаміку фінансового результату з планом часу  $t$ .

На підставі [4] техніки **якісного дослідження** неперервної математичної моделі (2) визначено особливі точки:  $B(0, 0, 0)$  і  $V(0, 0, -1)$ .

Матриця лінеаризації Якобі математичної моделі (2) має вигляд:

$$J(\cdot) = \begin{pmatrix} 1+x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x_3 & 0 \\ Ax_1 & Ax_2 & 0 \end{pmatrix},$$

яка обчислюється в особливих точках. Далі шукаються

корені характеристичного рівняння

$$\det|J(\cdot) - \lambda E| = 0.$$

Для тривіальної особливої точки має місце випадок, коли один з характеристичних коренів рівний нулю, два інші – додатні. Це так званий критичний випадок, коли досліджується наявність сідлових точок або точок сідло-фокус, що лежать на поверхні сепаратрис [4, с. 188].

**Кількісне дослідження** моделі (2) здійснювалось у середовищі Mathcad, у результаті чого було отримано такі результати (рис. 5, рис. 6).

З рис. 5 є очевидним, що зростання кредитно-інвестиційного та депозитних портфельів впливає на майбутнє накопичення фінансових результатів банку. Чим більший коефіцієнт взаємодії  $A$ , тим процес накопичення фінансових результатів відбувається швидше (див. рис. 6).

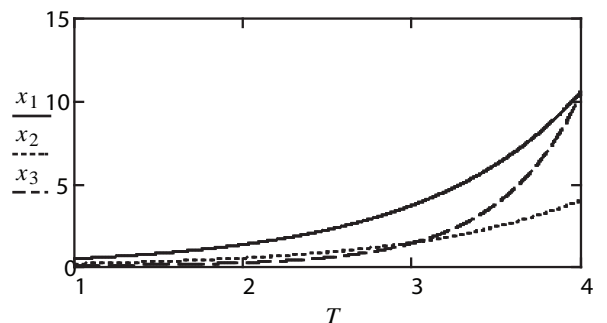


Рис. 5. Інтегральні криві моделі (2) при  $A = 0,5$

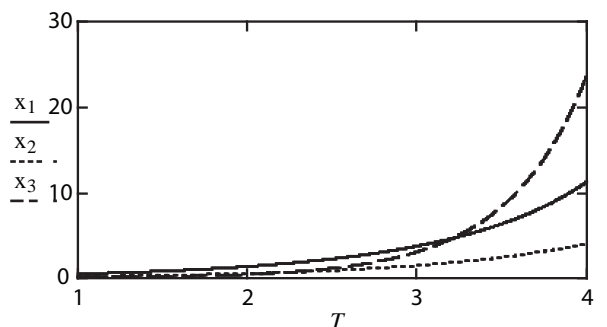


Рис. 6. Інтегральні криві моделі (2) при  $A = 1,1$

Математичну модель (2) можна розширити таким чином:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + a_1 x_1 x_3 + x_2 + b \\ \dot{x}_2 = x_2 + a_2 x_2 x_3 + x_1 + c, \\ \dot{x}_3 = x_3 + A \cdot x_1 x_2 + d \end{cases} \quad (9)$$

де  $b, c, d$  – порогові значення величин моделі;  $a_1$  – коефіцієнт ефективності кредитно-інвестиційного портфелю;  $a_2$  – коефіцієнт ефективності депозитного портфелю.

Тоді динаміка розвитку математичної моделі (9) при різних параметрах  $a_1$  та  $a_2$  матиме такий вигляд (рис. 7, рис. 8).

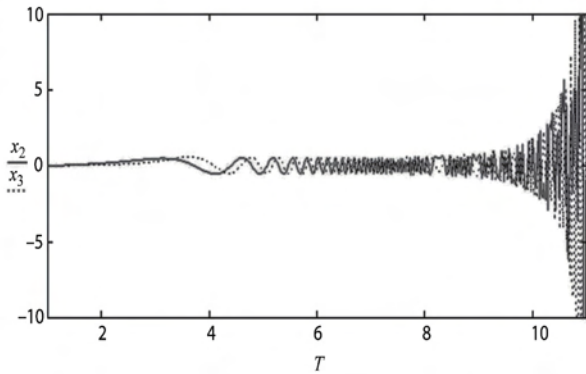


Рис. 7. Інтегральні криві моделі (9) при  $a_2 = -1$

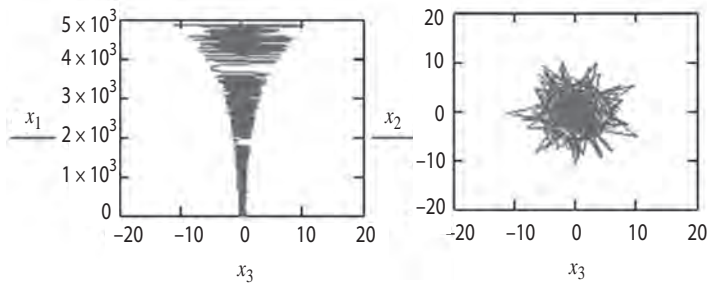


Рис. 8. Фазові портрети моделі (9) при  $a_2 = -1$

При від'ємному значенні показника ефективності  $a_2$  модель виходить з рівноважного стану (рис. 7, 8). При додатньому значенні – модель банківського механізму нормалізується та підвищується ефективність депозитного портфелю банку (рис. 9).

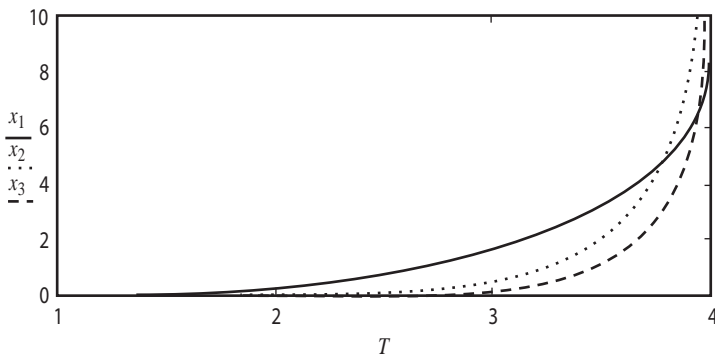


Рис. 9. Динаміка моделі (9) при  $a_2 = 0,5$

Для показника ефективності кредитно-інвестиційного портфелю банку  $a_1$  твердження є справедливими, як і для показника  $a_2$ . При від'ємному  $a_1$  – модель

виходить зі стану рівноваги (рис. 10), при додатньому – стабілізується (рис. 11).

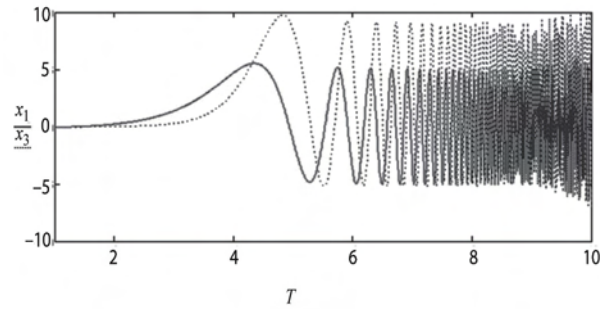


Рис. 10. Інтегральні криві моделі (9) при  $a_1 = -0,5$

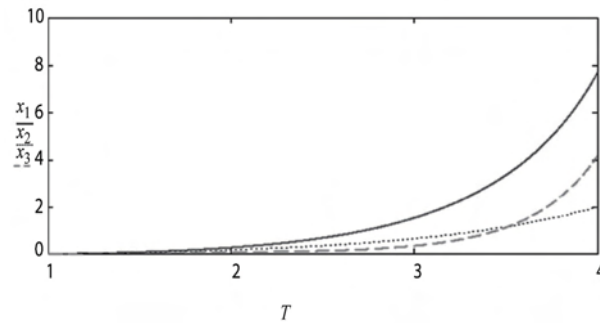


Рис. 11. Інтегральні криві моделі (10) при  $a_1 = 0,5$

Таким чином, ефективність кредитно-інвестиційного та депозитного портфелів банку відіграють важливу роль у фінансовій стабільності банку в цілому. Інформація даних показників повинна враховуватися при формуванні політики розвитку банківської установи, тому що вона визначає загальну стійкість моделі банківського механізму.

## ВИСНОВКИ

Результати реалізації задач відповідно до поставленої мети зводяться до таких висновків:

1. Запропоновано формалізовану модульну структуру банківського механізму, визначено взаємозв'язок між його складовими елементами та параметри, що впливають на їхню динаміку.

2. На основі цієї структури розглянуто банківський механізм як нелінійну неперервну динамічну систему, яка описується сукупністю звичайних нелінійних диференціальних рівнянь та побудовано трифакторну динамічну модель банку.

3. Здійснено аналітичне, якісне і кількісне дослідження трифакторної моделі. Запропоновано також розширену модель та досліджено динаміку при різних показниках ефективності кредитно-інвестиційного та депозитного портфелів банку.

4. Результати комп'ютерного моделювання співставлено з реальними статистичними даними банку «Брокбізнесбанк» з січня 2005 року по вересень 2011 року.

5. Використання моделі дозволяє надати рекомендації щодо підвищення ефективності функціонування



банку за рахунок створення раціональної структури кредитно-інвестиційного та депозитного портфелів. Можливість адаптації моделі до зовнішнього середовища і внутрішньої політики банку дає змогу використовувати модель для прогнозування можливих сценаріїв його розвитку. ■

#### ЛІТЕРАТУРА

**1. Вітлінський В. В.** Концепції та інструментарій нелінійної економічної динаміки / В. В. Вітлінський, Ю. В. Коляда, А. Я. Махоткіна // Моделювання та інформаційні системи в економіці : зб. наук. праць.– К. : КНЕУ, 2011.– Вип. 84.– С. 29 – 35.

**2. Вітлінський В. В.** Моделювання економік : навч. посібник.– К. : КНЕУ, 2005.– 408 с.

**3. Добровольський О. А.** Розробка динамічної моделі банку та її використання в стратегічному плануванні і управлінні : автореферат. – Дніпропетровськ, 2002.– 18 с.

**4. Коляда Ю. В.** Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки : монографія / Ю. В. Коляда.– К. : КНЕУ, 2011.– 297 с.

**5.** Моделювання економічної динаміки : навч. посібн. / Г. В. Лавінський, О. С. Пшенишнюк, С. В. Устенко, О. Д. Шарпов.– К. : Вид-во «Атіка», 2006.– 276 с.

**6. Симо К.** Изучение динамических систем с использованием компьютера / К. Симо // Нелинейная динамика.– 2006.– Т. 2.– С. 243 – 254.

**7.** <http://banker.ua/banks>