УДК 336.49

ПІДВИЩЕННЯ ПРОГНОСТИЧНИХ ТА АНАЛІТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СИСТЕМ СТРУКТУРНИХ РІВНЯНЬ НА ОСНОВІ ПАРАМЕТРИЧНОЇ АДАПТАЦІЇ

ПРОКОПОВИЧ С. В.
кандидат економічних наук
ЯЦЕНКО Р. М.
кандидат економічних наук

Харків

Процес моделювання соціально-економічних систем (СЕС) пройшов три стадії розвитку: детермінізм, стохастичність і адаптивність, що відповідають трьом видам інформації: визначеність, невизначеність, незнання.

Повна визначеність інформації дозволяє будувати детерміністські моделі, у яких вважаються відомими всі структурні коефіцієнти рівнянь, а також екзогенні (управляючі) змінні та збурюючі впливи. Однак припущення, що закладаються при побудові детерміністських моделей, не враховують багато складних умов функціонування реальної СЕС. Структурні співвідношення між елементами системи не є постійними в часі, вони піддаються різним випадковим змінам, що викликаються зовнішніми збурюючими впливами.

Отже, з'явилася необхідність брати до уваги при побудові моделей імовірнісну природу зовнішніх впливів і структурних коефіцієнтів рівнянь. Стохастичний підхід припускає відомими статистичні характеристики випадкових процесів і випадкових функцій, що відображають зовнішні впливи на модельовану систему і структурні співвідношення між її елементами. Однак імовірнісні характеристики системи для більшості задач заздалегідь не відомі, а їх визначення часто пов’язано з великими труднощами.

Тому виникає необхідність застосування адаптивного підходу до рішення задачі оптимального управління при невідомій чи неповній початковій інформації, без визначення заздалегідь статистичних характеристик системи. Цей підхід полягає в послідовному застосуванні методу стохастичної апроксимації як основи для побудови адаптивних економетричних моделей. Це дозволяє одержати рішення задачі ідентифікації та задачі прогнозування без явного розгляду імовірнісних характеристик.

Основними причинами необхідності адаптивного підходу при моделюванні СЕС в Україні є:

1. *Погрішність у вихідних статистичних даних*. Часові ряди економічних показників містять помилки, які неминуче виникають при їх вимірі, а також існує невідповідність між оцінками тих самих показників, отриманих за різними методиками виміру та з різною метою.

2. *Незнання всіх істотних факторів*, що призводить до формування неповних, наближених функціональних залежностей при моделюванні економічних процесів.

3. *Наближений характер рівнянь моделі*. Спрощення характеру реальних економічних зв'язків, виділення головних, важливих факторів, неповне врахування обмежень. Заміна нелінійних зв'язків між економічними показниками лінійними та припущення про незмінність більшості структурних коефіцієнтів знижують якість моделей. У той же час лінійні моделі дозволяють переборювати обчислювальні труднощі та здійснювати аналітичне дослідження їхніх властивостей. Тому застосування методів, що поліпшують імітаційні та прогнозні властивості лінійних економетричних моделей, дуже бажано. Один з таких способів – побудова адаптивних моделей із змінними параметрами.

Для визначення відсутньої початкової інформації про систему при адаптивному підході використовується поточна інформація. Остання виникає в процесі функціонування системи під впливом управляючих впливів. Управляючі впливи на систему переслідують двояку мету. По-перше, вони служать засобом для вивчення системи, визначення невідомих структурних характеристик. По-друге, вони сприяють спрямування системи до оптимального стану. Таким чином, принцип дуального управління при адаптивному підході відіграє вирішальну роль.

Основними методами рішення адаптивних задач управління є імовірнісні ітеративні методи, засновані на принципах стохастичної апроксимації [1].

Розглянемо процес параметричної адаптації комплексної економетричної моделі. Об'єктом а даптації є коефіцієнти системи структурних рівнянь (параметри) моделі.

Позначимо через $F_t = (F_i, t)$ об'єднання векторів функцій усіх рівнянь регресії, що входять у модель $(i = \overline{1, M})$, де M – розмірність вектора F_t. Вектор $F_{\phi t} = (F_{\phi it})$, $(i = \overline{1, M})$ – вектор фактичних значень економічних показників.

Матриця $\alpha = (\alpha_{ij})$ – матриця структурних коефіцієнтів рівнянь, $i = \overline{1, M}$. Рядок з номером i матриці α відповідає i-му елементу вектора F_t. Число стовпців матриці α дорівнює максимальному числу факторів у рівняннях регресії N. Елемент α_{ij} матриці α приймемо рівним j-му коефіцієнту i-го рівняння регресії $(i = \overline{1, M}; j = \overline{0, N}$; номером 0 позначений вільний член рівняння регресії). Якщо число ненульових коефіцієнтів рівняння регресії $N_1 < N$, то приймемо $\alpha_{ij} = 0$ $(j = N_1 + 1, \ldots, N)$.

Матриця факторів $\Phi_t = (\varphi^t_{ij})$, $(i = \overline{1, M}; j = \overline{0, N})$ формується з векторів правих частин рівнянь регресії. Елемент φ^t_{ij} матриці Φ_t – це фактор рівняння регресії при коефіцієнті α_{ij}. Елементи φ^t_{i0} приймаються рівними 1.

Тепер систему одночасних рівнянь у матричному вигляді можна записати:

$$F_t = \alpha \Phi_t' \text{ чи у векторній формі } F_{it} = \sum_{j=0}^{N} \alpha_{ij} \varphi^t_{ij}, \; i = \overline{1, M}. \qquad \textbf{(1)}$$

У базовому періоді, для якого будується економетрична модель, можна проводити порівняння розрахункових економічних показників з їх фактичними значеннями. При цьому погрішності, що містяться у фактичних часових рядах, не враховуються. Фактичні значення вважаються тим еталоном, до якого повинні наближатися розрахункові значення, вироблювані моделлю, а вихідні коефіцієнти рівнянь регресії – початковими даними в цьому наближенні.

Власне кажучи, виникає задача ідентифікації невідомої системи за допомогою моделі, що навчається. Модель, що навчається, здатна після закінчення часу змінювати свою структуру та параметри так, щоб за своїми властивостями наблизитися до реальної досліджуваної системи [6].

За межами базового періоду при використанні моделі для прогнозу порівняння з фактичними даними неможливо. Але, якщо є гіпотеза про динаміку одного чи більше економічних показників, можна розглядати їх як еталонну модель, що грає роль джерела фактичних даних. Якщо є припущення про структурні співвідношення між деякими показниками системи, можна вказати спосіб адаптивного підходу й у цьому випадку. Нарешті, є можливість використовувати ряди коефіцієнтів рівнянь регресії, отримані методом адаптації в базовому періоді для прогнозування їхніх значень [3, 4].

Структурні коефіцієнти необхідно змінювати таким чином, щоб модельована система перейшла в бажаний для нас стан. Подібний перехід можливий при виконанні таких умов: повинна бути сформульована мета навчання та розроблений алгоритм навчання [4].

Метою навчання виступатиме мінімізація середнього квадратичного відхилення розрахункових значень F_t від фактичних значень показників $F_{\phi t}$:

$$J_i(\Phi_{it}, \alpha_i^t) = 1/2(F_{\phi it} - \sum_{j=0}^{N} \alpha_{ij}^t \varphi_{ij}^t)^2 \to$$
$$\to \min (i = 1, \ldots, M;\ t = 1, \ldots, T), \quad (2)$$

де Φ_{it} – i-ий рядок матриці факторів Φ_t; α^t_i – i-ий рядок матриці коефіцієнтів α^t.

Коефіцієнти α^t_{ij} і значення факторів φ^t_{ij} ($i = \overline{1, M}$; $j = \overline{0, N}$) повинні задовольняти системі рівнянь моделі (1), у якій матриця коефіцієнтів рівнянь регресії непостійна, вона змінюється від року до року протягом періоду T.

Задача оптимального навчання економетричної моделі формулюється в такий спосіб. Визначити коефіцієнти $\overline{\alpha}^t_{ij}$ і значення факторів $\overline{\varphi}^t_{ij}$ ($i = \overline{1, M}$; $j = \overline{0, N}$) такі, що виконуються рівняння системи (1) і умова мінімуму (2).

Управляючі параметри, з одного боку, служать для ідентифікації об'єкта управління (моделі), з іншого боку – є засобом досягнення оптимального стану. У нашій моделі об'єктом ідентифікації є коефіцієнти рівнянь регресій α^t_{ij}, а управляючими параметрами – фактори φ^t_{ij}. Розглянемо умови застосування та зміст адаптивного алгоритму ідентифікації в загальному виді.

У задачі оптимального навчання (1) – (2) елементи матриці Φ_t невідомі. Тому функціонал (2) явно записати не можна. Відомі тільки окремі реалізації факторів φ^t_{ij}, що відповідають структурним коефіцієнтам α^t_{ij}, прийнятим у моделі. У такій ситуації визначення оптимальних векторів $\overline{\alpha}^t_i$ досягається за допомогою адаптивного алгоритму ідентифікації [6], а саме:

$$\alpha_i^t[n] = \alpha_i^t[n-1] + \Gamma_i[n]\nabla\alpha_i Q_i(\varphi_i^t[n],\ \alpha_i^t[n-1]), \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (3)$$

де $Q_i(\varphi_i^t[n], \alpha_i^t[n-1]) = 1/2(F_{\phi\ it} - \sum_{j=0}^{N} \alpha_{ij}^t[n-1]\varphi_{ij}^t[n])^2$ – конкретна реалізація функціонала (2), що відповідає вектору $\varphi^t_i[n]$; n – номер ітерації;

$\nabla\alpha_i Q_i = (\partial Q_i / \partial\alpha_{i0},\ \partial Q_i / \partial\alpha_{i1},\ \ldots,\ \partial Q_i / \partial\alpha_{iN})$ – градієнт функціонала Q; $\Gamma_i[n]$ – квадратна матриця розмірності N, що забезпечує збіжність $\alpha^t_i[n]$ до $\overline{\alpha}^t_i$.

За допомогою алгоритму (3) за значеннями $\varphi^t_i[n]$, що спостерігаються, визначається оцінка вектора $\alpha^t_i[n]$, що з часом прагне до вектора $\overline{\alpha}^t_i$. Значення факторів φ^t_{ij} ($i = \overline{1, M}$; $j = \overline{0, N}$) реалізації векторів φ^t_i, а також інші ендогенні змінні визначаються в результаті рішення системи одночасних рівнянь (1), при підстановці в них векторів $\alpha^t_i[n-1]$, вироблюваних алгоритмом (3) [2]. Екзогенні змінні, а також фактори рівнянь регресії, що залежать від попереднього моменту часу ($t-1$), утворять визначену частину системи (1). Як початкове наближення рішення системи рівнянь вибираються значення ендогенних змінних, отримані в попередньому періоді ($t-1$). Вихідними для n-ї ітерації є значення змінних φ^t_{ij}, обчислених на ($n-1$)-й ітерації.

Початковими значеннями $\alpha^t_i[0]$ для першого року роботи моделі служать вихідні значення коефіцієнтів рівнянь регресії, отримані методом найменших квадратів. Е. М. Левицький у своїх роботах [3, 4] пропонує для року t початковими значеннями брати оптимальні оцінки $\overline{\alpha}^{t-1}_i$, отримані на попередньому кроці $t-1$ роботи моделі. Однак при практичній реалізації адаптивного алгоритму ідентифікації в роботах авторів кращий результат (велика швидкість збіжності ітераційного процесу) був отриманий при виборі оцінок, отриманих за допомогою МНК. Такий результат може бути пояснений тим, що динаміка економічних показників у перехідному періоді призводить до виражених коливальних змін значень структурних коефіцієнтів, що відображають ступінь впливу збільшення фактора на збільшення результуючого показника.

Елементи матриці $\Gamma[n]$ повинні підкорятися визначеним умовам для забезпечення збіжності алгоритму (3). Ці умови, однак, залишають велику свободу для вибору елементів матриці $\Gamma[n]$. Отже, існує не один алгоритм, а сімейство алгоритмів ідентифікації, що розрізняються якістю навчання.

Для оцінки якості навчання можна ввести деяку міру, яка б оцінювала на кожній ітерації відстань між поточним і оптимальним станом. Тоді алгоритм ідентифікації можна вважати оптимальним, якщо ця відстань на кожній ітерації мінімальна [6]. Такою мірою якості навчання може служити функціонал [4]:

$$\hat{J}_i(\alpha_i^t[n]) = 1/n\sum_{m=1}^{n} Q_i(\varphi_i^t[m],\ \alpha_i^t[n]),\ i = 1, \ldots, M. \quad (4)$$

Для такого критерію якості навчання матриця $\Gamma[n]$ приймає вигляд:

$$\Gamma_i[n] = (L_i[n])^{-1} = \left(\sum_{m=1}^{n} \varphi_i^t[m](\varphi_i^t[m])'\right)^{-1}. \quad (5)$$

Алгоритм (3) з матрицею $\Gamma_i[n]$ виду (5) являє собою рекурентну форму МНК. Застосування цього методу пов'язане з необхідністю обертання матриці $L_i[n]$. Крім цієї обставини, негативний вплив на якість роботи рекурентного МНК робить сильна міжкомпонентна або часова кореляція складових фактора φ^t_i ($i = \overline{1, M}$). Ці труднощі усуваються за допомогою квазіоптимальних алгоритмів [5]. Префікс «квазі» з'являється в результаті апроксимації матриці діагональною матрицею чи скалярною матрицею $\Gamma_{2i}[n] = \gamma_i[n]$ I (I – одинична матриця). Конкретний вид елементів матриць Γ_{1i} і Γ_{2i} залежить від міри апроксимації діагональними матрицями вихідної матриці $\Gamma_i[n]$.

У роботі [5] пропонується якість апроксимації вимірювати квадратом норми помилки апроксимації $\Delta[n]$.

Розглядаються два види помилок апроксимації:

$$||\Delta_{Ii}[n]||^2 = ||I - L_i[n]\,\Gamma_{ik}[n]||^2 \text{ та } ||\Delta_{IIi}[n]||^2 =$$
$$= ||L_i[n] - \Gamma_{ik}^{-1}[n]||^2\ k = 1, 2.$$

Під квадратом норми матриці A розуміється слід матриці $||A||^2 = tr\,(A'\times A)$.

Залежно від поєднання виду помилки апроксимації і виду апроксимуючої матриці Γ_{ik} одержуємо чотири алгоритми квазіоптимального навчання:

Матриця	$\|\|\Delta_{Ii}[n]\|\|^2$	$\|\|\Delta_{IIi}[n]\|\|^2$
$\Gamma_{1u}[n]$	$\gamma_m[n] = l_{mm}[n] / \sum_{j=1}^{N} l_{mj}^2[n]$	$\gamma_m[n] = 1 / l_{mm}[n]$
	$m = 0, \ldots, N$	$m = 0, \ldots, N$

ЕКОНОМІКА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

$$\Gamma_{2u}[n] \qquad \gamma[n]=\sum_{i=0}^{N} l_{ii}[n] \Big/ \sum_{j=0}^{N} l_{ij}^{2}[n] \qquad \gamma[n]=N \Big/ \sum_{i=0}^{N} l_{ii}[n]$$

Виконуючи задачу оптимального навчання, значення коефіцієнтів α^{t}_{ij} для кожної реалізації факторів φ^{t}_{ij} у моменти часу t пропонується визначати, ґрунтуючись на формулі, запропонованій в роботі [3]:

$$\alpha^{t}_{ij}[n]=\alpha^{t}_{ij}[n-1]+$$
$$+\left[\left(\left|\alpha^{t}_{ij}[n-1]\right|\times\varphi^{t}_{ij}[n]\right) \Big/ \left(\sum_{j=0}^{N}\left|\alpha^{t}_{ij}[n-1]\right|\cdot\varphi^{t}_{ij}[n]\right)\right]\times$$
$$\times\left[1\Big/\left(n^{1/2}(\varphi^{t}_{ij}[n])^{2}\right)\right]\cdot\left(F_{\phi\ it}-\sum_{j=0}^{N}\alpha^{t}_{ij}[n-1]\cdot\varphi^{t}_{ij}[n]\right)\cdot\varphi^{t}_{ij}[n] \qquad \mathbf{(6)}$$

$(j = 0, \ldots, N;\ i = 1, \ldots, M)$,

де градієнт функціонала розглядається як середньозважена величина.

Алгоритмізацію методу параметричної адаптації структурних коефіцієнтів пропонується реалізувати за допомогою середовища Microsoft Excel. Цей табличний процесор є лідером серед програмного забезпечення, що використовується для автоматизації математичних розрахунків в науковому середовищі. Програмну реалізацію методу представимо у вигляді користувацької функції, оскільки ця форма запису виконуваних алгоритмів є доволі зручною для практичного застосування. Користувацькі функції у середовищі Microsoft Excel автоматично додаються до загального списку функцій, що є доступними для користувача.

Розглянемо блок-схему алгоритму функції адаптації структурних коефіцієнтів за методом стохастичної апроксимації, що представлено на *рис. 1*. На початковому етапі відбувається визначення розмірностей вхідних аргументів – матриць структурних коефіцієнтів рівнянь, ендогенних та екзогенних змінних. У випадку, якщо вихідні дані не відповідають рекурентній системі рівнянь, чи є розбіжності за розмірностями матриць, функція достроково завершує свою роботу з повідомленням про помилку.

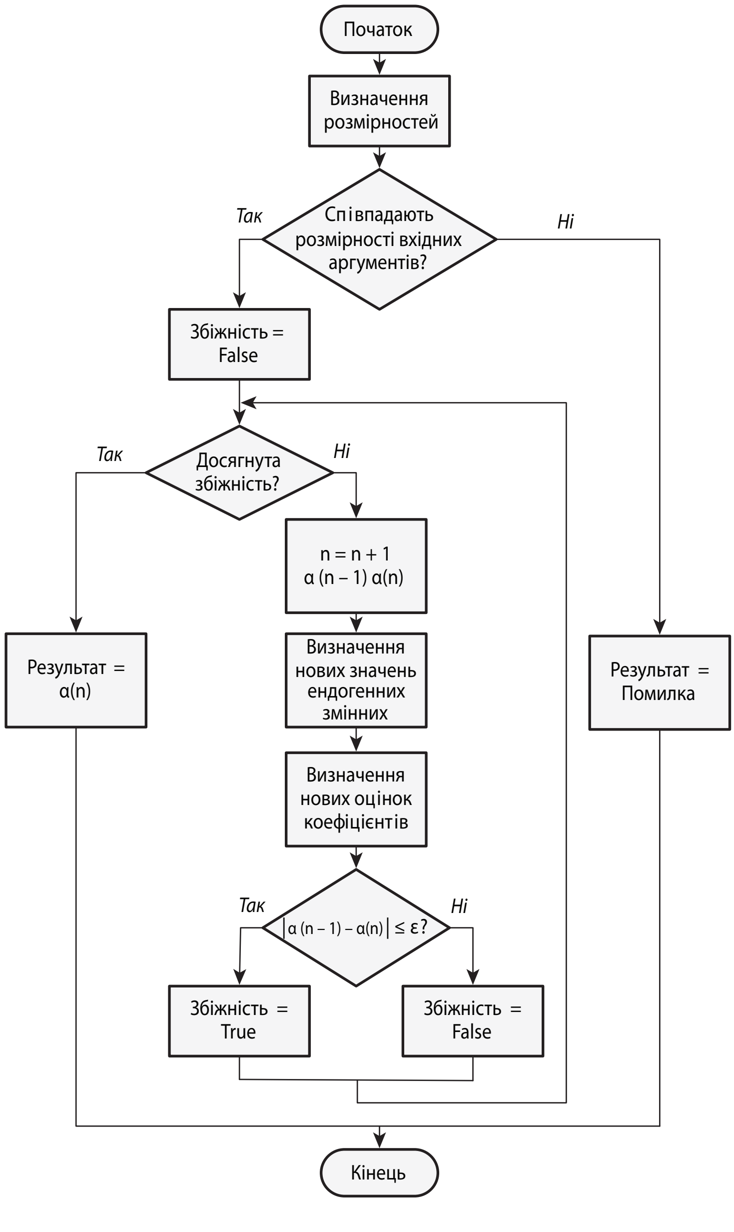

Рис. 1. Блок-схема алгоритму

Наступні етапи розрахунку алгоритму реалізовано за допомогою циклу, що завершує свою роботу, коли досягнута збіжність структурних коефіцієнтів, тобто різниця між значеннями коефіцієнтів на кроці n та $n - 1$ не перевищує заданої точності ε (за замовчуванням ε = 0,001).

Якщо збіжність не досягнута, то потрібно за допомогою оцінок коефіцієнтів, що отримані на попередньому кроці, або їх початкових значень, визначити нові значення ендогенних змінних F_{it}. Отримані значення використовуються для розрахунку нових значень оцінок коефіцієнтів $\alpha^{t}_{ij}[n]$ за формулою (6). Останні визначаються за допомогою двох вкладених циклів для кожного рівняння системи та коефіцієнта:

```
For i = 1 To m
  ...
  For j = 1 To n
    If a_(i, j) <> 0 Then
      a(i, j) = a_(i, j) + Abs(a_(i, j)) * x(i, j) / _
        s * (1 / (Sqr(k) * x(i, j) ^ 2)) * _
        (y(i) - yt(i)) * x(i, j)
      'Перевірка збіжності
      flag = flag And (Abs(a(i, j) - a_(i, j)) <= epsilon)
    End If
  Next j
Next i
```

У випадку досяжності збіжності результатом роботи алгоритму є структурні коефіцієнти $\alpha^{t}_{ij}[n]$, що були отримані на відповідному кроці n головного циклу функції.

Зміну структурних коефіцієнтів можна розглядати як зміну ступеня впливу відповідного фактора на показник. Останнє може бути результатом зміни або ефективності використання фактора, або величини витрат фактора.

Аналіз динаміки структурних коефіцієнтів системи регресійних рівнянь моделі дозволяє виявити тенденції зміни коефіцієнтів у базовому періоді та їх залежність від зміни відповідних факторів. Вивчення цих залежностей дозволяє глибше проникнути в механізм формування розглянутих показників, пояснити їхню динаміку. Більш того, знаючи тенденції зміни коефіцієнтів і використовуючи прогнозні дані про зміну факторів, можна визначити і тенденції зміни показників.

Таким чином, застосування методу адаптації при побудові економетричної моделі призводить не тільки до кращого наближення моделі до реальних процесів, що протікають у системі, але і дає можливість вивчати зміну ефективності використання і ступеню впливу різних факторів на залежні від них показники. У результаті модель не тільки за результатами, але і за структурою та механізмом дії стає більш адекватною. ■

ЛІТЕРАТУРА

1. **Вазан М. Т.** Стохастическая аппроксимация.– М.: Мир, 1972.– 295 с.

2. **Демидович Б. П., Марон И. А.** Основы вычислительной математики.– М.: Наука, 1970/– 664 с.

3. **Левицкий Е. М.** Адаптация в моделировании экономических систем.– М.: Наука, 1997.– 253 с.

4. **Левицкий Е. М.** Адаптивные эконометрические модели.– Новосибирск: Наука, 1981.– 224 с.

5. **Товстуха Т. И.** Исследование дискретных квазиоптимальных алгоритмов идентификации // Автоматика и телемеханика.– 1974.– № 4.– С. 71 – 80.

6. **Цыпкин Я. З.** Основы теории обучающихся систем.– М.: Наука, 1970.– 252 с.