УДК **517,519**

КАКИЕ НАЛОГИ НУЖНЫ ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ ВВП

ПЕЛИХ В. И.
кандидат физико-математических наук
ВОЛГОГРАД (РОССИЯ)

Существует великое множество схем налогообложения. Например, в России принята плоская шкала, но многие экономисты и оппозиционные публицисты мечтают о прогрессивной шкале налогов. Аргументация любой из сторон не убеждает, по крайней мере, тех, кто привык к строгим доказательствам. Попробуем построить простейшую математическую модель абстрактного государства, поставим естественную цель максимизации валового внутреннего продукта (ВВП) и найдём оптимальную схему налогообложения.

1. Пусть множество X обозначает совокупность жителей государства. Через $z(x,t)$ обозначим фондовооружённость гражданина x в момент t в денежном выражении. Фондовооружённость будем понимать в широком смысле, то есть это те фонды и материальные ресурсы, которые гражданин использует в своей производительной деятельности. У детей, безработных, пенсионеров и т. п. эта функция будет нулевой. Для удобства интерпретации и упрощения математических выкладок множество X отождествим с отрезком [0, 1], расположив на нём всех жителей, например, по мере роста их начальной фондовооружённости $z(x,0)$ и приписав каждому жителю по равной доле этого отрезка, таким образом, он будет заполнен жителями плотно.

Скорость создания продукции в денежном выражении каждым жителем в момент t (производственную функцию) обозначим символом $f(x,z,t)$, тогда скорость прироста $\dot{w}(x,t)$ «экономического пирога», достигнутая индивидом x – в момент t задаётся формулой $\dot{w}(x,t) = f(x,z(x,t),t)$.

А скорость создания общегосударственного пирога, очевидно, будет задаваться величиной

$$\dot{w}(t) = \int_0^1 f(x,z(x,t),t)dx.$$

Процесс деления «пирога» начинается на стадии производства выделением части произведённого на нужды самого производства (оборотные средства, амортизационные траты и т. п.). Будем считать, что эта доля $1-\;(x,t)$, $0<\;(x,t)<1$, у каждого производителя известна и определяется структурой соответствующих производственных фондов. В этом случае доля «пирога» гражданина x, идущая на потребление и накопление, имеет скорость

$$f(x,z(x,t),t)\rho(x,t).$$

Далее в распределение прибыли вступают права собственности, уровни зарплаты и т. п. То есть установившаяся структура общества распределяет оставшуюся долю «пирога», произведённую гражданином u, между всеми гражданами, определяя долю каждому x с помощью рыночной функции распределения

$$\eta(u,t,x) > 0,\ \int_0^1 \eta(u,t,x)dx = 1.$$

Заметим, что для каждого гражданина x эта функция границы сверху не имеет так, как описывает неравноправие присвоения в системе. Интегральное условие означает, что всё, произведённое гражданином u распределено без остатка. Таким образом, от производителя u гражданину x поступают средства в размере $\eta(u,t,x)f(u,z(u,t),t)\rho(u,t)$. Исходя из этого, скорость получения доходов любым гражданином x может быть вычислена по формуле

$$\dot{v}(x,t) = \int_0^1 \eta(u,t,x)f(u,z(u,t),t)\rho(u,t)du.$$

Если государство приняло ставку налога на прибыль $\beta(x,t), 0 \le \beta(x,t) < 1$, то каждый гражданин из своих доходов пополняет бюджет со скоростью $\dot{v}(x,t)\beta(x,t)$, следовательно, государство собирает бюджет $B(t)$ со скоростью

$$\dot{B}(t) = \int_0^1 \dot{v}(x,t)\beta(x,t)dx =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \beta(x,t)\eta(u,t,x)f(u,z(u,t),t)\rho(u,t)dudx.$$

Собираемый с такой быстротой бюджет делится правительством на три доли: $\varepsilon(x,t)$ – воспроизводство фондов индивида x, $\delta(x,t)$ – потребление индивидом x и $\alpha_0(t)$ – долю обязательных трат государства за пределы рассматриваемой системы. Ясно, что введённые функции распределения подчинены условиям

$$0 \le \varepsilon(x,t) < 1,\ 0 \le \delta(x,t) < 1,\ 0 < \alpha_0(t) \le 1,$$

причём

$$\int_0^1 [\varepsilon(x,t)+\delta(x,t)]dx+\alpha_0(t)=1.$$

Каждый гражданин x может выделить из своего дохода $\dot{v}(x,t)(1-\beta(x,t))$ некоторую (накопительную) часть и вложить в производственные фонды, находящиеся под управлением производителей u, распределяя их так: $\zeta(x,t,u)(1-\beta(x,t))\dot{v}(x,t)$. Управляющее распределение $\zeta(x,t,u)$, очевидно, подчиняется условиям:

$$0 \le \int_0^1 \zeta(x,t,u)du \le \zeta_0(x,t) < 1,$$

где $\zeta_0(x,t)$ – некоторая функция, обусловленная потребительским минимумом данного гражданина.

Уравнение баланса фондов, вверенных гражданину x, таким образом, состоит из суммы амортизационных отчислений, инвестиций производителей и вложений государства, за вычетом износа:

$$\begin{aligned}\dot{z}_t(x,t) &= f(x,z(x,t),t)(1-\rho(x,t)) + \\ &+\int_0^1 \zeta(u,t,x)(1-\beta(u,t))\dot{v}(u,t)du + \\ &+\dot{B}(t)\varepsilon(x,t)-\mu(x,t)z(x,t),\end{aligned}$$

где $\mu(x,t)$ – коэффициент износа производственных фондов. Окончательный вид уравнения после исключения производных $\dot{v}$ и $\dot{B}$ будет таким:

$$\begin{aligned}&\dot{z}_t(x,t) = f(x,z(x,t),t)(1-\rho(x,t))-\mu(x,t)z(x,t)+ \\ &+\int_0^1 [\eta(u,t,x)\int_0^1 \zeta(s,t,x)(1-\beta(s,t))ds + \\ &+\varepsilon(x,t)\int_0^1 \beta(s,t)\eta(u,t,s)ds]f(u,z(u,t),t)\rho(u,t)du.\end{aligned} \tag{1}$$

Уравнение динамики потребления получаем, суммируя скорости всех поступлений гражданину x на потребление:

$$\dot{p}_t(x,t) = (1-\beta(x,t))(1-\zeta(x,t))\dot{v}(x,t)+\dot{B}(t)\delta(x,t),$$

где

$$\zeta(x,t) = \int_0^1 \zeta(x,t,u)du\ .$$

После исключения производных это уравнение примет вид:

$$\begin{aligned}&\dot{p}_t(x,t) = (1-\beta(x,t))(1- \\ &-\zeta(x,t))\int_0^1 \eta(u,t,x)f(u,z(u,t),t)\rho(u,t)du + \\ &+\delta(x,t)\int_0^1\int_0^1 \beta(s,t)\eta(u,t,s)f(u,z(u,t),t)\rho(u,t)duds.\end{aligned} \tag{2}$$

Начальные условия для уравнений (1) и (2) имеют естественный экономический смысл:

$$p(x,0)=0, \quad z(x,0)=z_0(x). \tag{3}$$

2. Динамическая система (1) – (3) располагает тремя наборами управляющих функций:

$$\mathrm{A}=\{\beta(x,t),\ \varepsilon(x,t),\ \delta(x,t)\},$$
$$\mathrm{B}=\{\zeta(x,t,u),\eta(u,t,x)\}$$

и

$$\Gamma=\{f(x,z,t),\rho(x,t),\mu(x,t)\}.$$

Набор А подчинён государственному управлению. Входящие в него функции имеют естественную область допустимых изменений, и в границах этой области могут быть одномоментно изменены по решению госуправления.

Набор В находится «во власти невидимой руки рынка» и по «мановению» этой руки его функции могут быть также одномоментно изменены. Разумеется, если не брать в расчёт социальные проблемы, возникающие, например, при резкой смене распределения доходов.

Набор Г состоит из медленных функций управления. Влиять на этот набор могут как государство, так и рынок через модификацию технологических процессов. Набор Г назовём инструментом стратегического управления. На коротком отрезке времени будем считать его заданным и локально по времени фиксированным.

Целевым функционалом краткосрочного управления построенной экономической системой является:

$$\begin{aligned}W(T) &= \int_0^T\int_0^1 f(x,z(x,t),t)dxdt + \\ &+\int_0^1 z(x,T)dx \to \max.\end{aligned} \tag{4}$$

Этот функционал «заботится» о чисто экономических показателях таких, как ВВП и основные фонды.

Если задачей (4) занимается только государство, то следует искать максимум

$$W_1=\max_{\mathrm{A}}\{\int_0^T\int_0^1 f(x,z(x,t),t)dxdt+\int_0^1 z(x,T)dx\}, \tag{5}$$

управляя только набором А, если занимается только «невидимая рука рынка», то набором В –

$$W_2=\max_{\mathrm{B}}\{\int_0^T\int_0^1 f(x,z(x,t),t)dxdt+\int_0^1 z(x,T)dx\}. \tag{6}$$

Государство и рынок могут участвовать в решении задачи (4) не зависимо друг от друга в виде игры:

$$\begin{aligned}W_{12} &= \max_{\mathrm{B}}\max_{\mathrm{A}}\{\int_0^T\int_0^1 f(x,z(x,t),t)dxdt + \\ &+\int_0^1 z(x,T)dx\}.\end{aligned} \tag{7}$$

– сначала «ход» государства, затем «ход» рынка или наоборот:

$$\begin{aligned}W_{21} &= \max_{\mathrm{A}}\max_{\mathrm{B}}\{\int_0^T\int_0^1 f(x,z(x,t),t)dxdt + \\ &+\int_0^1 z(x,T)dx\}.\end{aligned} \tag{8}$$

Наконец, «виртуально» мы можем передать права государства и рынка «высшему органу управления», который будет владеть полным набором функций управления, то есть решать задачу:

$$\begin{aligned}W_3 &= \max_{\mathrm{A+B}}\{\int_0^T\int_0^1 f(x,z(x,t),t)dxdt + \\ &+\int_0^1 z(x,T)dx\}.\end{aligned} \tag{9}$$

Попытки создания такой экономики предпринимались тоталитарными режимами неоднократно и непременно заканчивались крахом. Тем не менее, математически такую задачу решать можно и её результат полезно использовать для сравнения, как идеальный.

3. Рассмотрение задачи (4) в чисто «тоталитарной» постановке начнём с построения для неё лагранжиана:

$$L=\int_0^T\int_0^1 f(x,z(x,t),t)dxdt+\int_0^T\int_0^1[\dot\lambda(x,t)-\lambda(x,t)\mu(x,t)]z(x,t)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_0^1\lambda(x,t)(1-\rho(x,t))f(x,z(x,t),t)dxdt+\int_0^T\int_0^1\int_0^1\lambda(u,t)\eta(x,t,u)\int_0^1\zeta(s,t,u)(1-\beta(s,t))dsdu\rho(x,t)f(x,z(x,t),t)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_0^1[\int_0^1\int_0^1\beta(s,t)\eta(x,t,s)ds\lambda(u,t)\varepsilon(u,t)du]f(x,z(x,t),t)\rho(x,t)dxdt+\int_0^1[(1-\lambda(x,T))z(x,T)+\lambda(x,0)z_0(x)]dx.$$

Найдём его частные вариации по z и по каждой управляющей функции.

Вариация по z:

$$\Delta_z L=\int_0^T\int_0^1 f_z(x,z(x,t),t)\Delta z(x,t)dxdt+\int_0^T\int_0^1[\dot\lambda(x,t)-\lambda(x,t)\mu(x,t)]\Delta z(x,t)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_0^1\lambda(x,t)(1-\rho(x,t))f_z(x,z(x,t),t)\Delta z(x,t)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_0^1\int_0^1\lambda(u,t)\eta(x,t,u)\int_0^1\zeta(s,t,u)(1-\beta(s,t))dsdu\rho(x,t)f_z(x,z(x,t),t)\Delta z(x,t)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_0^1[\int_0^1\int_0^1\beta(s,t)\eta(x,t,s)ds\lambda(u,t)\varepsilon(u,t)du]f_z(x,z(x,t),t)\rho(x,t)\Delta z(x,t)dxdt+\int_0^1(1-\lambda(x,T))\Delta z(x,T)dx.$$

$$\Delta_z L=\int_0^T\int_0^1\{\dot\lambda(x,t)-\lambda(x,t)\mu(x,t)+[1+\lambda(x,t)(1-\rho(x,t))]f_z(x,z(x,t),t)\}\Delta z(x,t)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_0^1\left\{\int_0^1\lambda(u,t)\eta(x,t,u)\int_0^1\zeta(s,t,u)(1-\beta(s,t))dsdu+\right.$$
$$\left.+\int_0^1\int_0^1\beta(s,t)\eta(x,t,s)ds\lambda(u,t)\varepsilon(u,t)du\right\}\rho(x,t)f_z(x,z(x,t),t)\Delta z(x,t)dxdt+\int_0^1(1-\lambda(x,T))\Delta z(x,T)dx.$$

Вариация по β: $\Delta_\beta L=\int_0^T\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left[\eta(x,t,s)\varepsilon(u,t)-\eta(x,t,u)\zeta(s,t,u)\right]f(x,z(x,t),t)\rho(x,t)\lambda(u,t)\Delta\beta(s,t)dsdudxdt.$

Вариация по ε:

$$\Delta_\varepsilon L=\int_0^T\int_0^1\int_0^1\int_0^1\beta(s,t)\eta(x,t,s)\lambda(u,t)f(x,z(x,t),t)\rho(x,t)\Delta\varepsilon(u,t)dsdudxdt=$$
$$=\int_0^T\int_0^1\lambda(u,t)\int_0^1\int_0^1\beta(s,t)\eta(x,t,s)f(x,z(x,t),t)\rho(x,t)dsdx\Delta\varepsilon(u,t)dudt.$$

Вариация по η:

$$\Delta_\eta L=\int_0^T\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left\{\beta(s,t)\lambda(u,t)\varepsilon(u,t)+\lambda(s,t)\zeta(u,t,s)(1-\beta(u,t))\right\}\rho(x,t)f(x,z(x,t),t)\Delta\eta(x,t,s)dsdudxdt.$$

Вариация по ζ: $\Delta_\zeta L=\int_0^T\int_0^1\int_0^1\int_0^1\lambda(u,t)\eta(x,t,u)(1-\beta(s,t))\rho(x,t)f(x,z(x,t),t)\Delta\zeta(s,t,u)dsdudxdt.$

Приравнивая нулю все частные вариации, приходим к системе уравнений:

при z:

$$\dot\lambda(x,t)-\lambda(x,t)\mu(x,t)+[1+\lambda(x,t)(1-\rho(x,t))]f_z(x,z(x,t),t)+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\lambda(u,t)[\eta(x,t,u)\zeta(s,t,u)(1-\beta(s,t))+\beta(s,t)\eta(x,t,s)\varepsilon(u,t)]dsdu\rho(x,t)f_z(x,z(x,t),t)=0, \quad (10)$$
$$\lambda(x,T))=1;$$

при β: $\int_0^1\int_0^1\left[\eta(x,t,s)\varepsilon(u,t)-\eta(x,t,u)\zeta(s,t,u)\right]f(x,z(x,t),t)\rho(x,t)\lambda(u,t)dudx=0;$ (11)

при ε: $\lambda(u,t)\int_0^1\int_0^1 \beta(s,t)\eta(x,t,s)f(x,z(x,t),t)\rho(x,t)dsdx=0;$ (12)

при η: $\int_0^1 \left\{\beta(s,t)\lambda(u,t)\varepsilon(u,t)\lambda(s,t)\zeta(u,t,s)(1-\beta(u,t))\right\}\rho(x,t)f(x,z(x,t),t)du=0.$ (13)

при ζ: $\int_0^1 \lambda(u,t)\eta(x,t,u)(1-\beta(s,t))\rho(x,t)f(x,z(x,t),t)dx=0.$ (14)

Найдём решение начальной задачи (10). Для этого преобразуем её уравнение к виду:

$\dot{\lambda}(x,t)+\lambda(x,t)F(x,t)+(1+C(t)\rho(x,t))G(x,t)=0$, где

$F(x,t)=(1-\rho(x,t))f_z(x,z(x,t),t)-\mu(x,t);$

$$C(t)=\int_0^1 \lambda(u,t)\{\int_0^1[\eta(x,t,u)\zeta(s,t,u)(1-\beta(s,t))+\beta(s,t)\eta(x,t,s)\varepsilon(u,t)]ds\}du\equiv$$

$$\equiv\int_0^1 \lambda(u,t)B(u,t)du;$$

$G(x,t)=f_z(x,z(x,t),t).$

Отметим, что G (x, t)   0 в силу свойства производственной функции. В этих обозначениях решение задачи (10) имеет вид

$$\lambda(x,t)=1+\exp(-\int_0^t F(x,s)ds)\int_t^T \exp(\int_0^v F(x,s)ds)(1+C(v)\rho(x,v))G(x,v)dv, \tag{15}$$

при этом

$$C(t)=\int_0^1\left[1+\exp(-\int_0^t F(x,s)ds)\int_t^T \exp(\int_0^v F(x,s)ds)(1+C(v)\rho(x,v))G(x,v)dv\right]B(x,t)dx\,.$$

Последнее соотношение есть интегральное уравнение Вольтера второго рода относительно $C(t)$:

$$C(t)=\int_0^1 B(x,t)(1+\int_t^T \exp(\int_t^v F(x,s)ds)G(x,v)dv)dx+\int_t^T C(v)\int_0^1 \exp(\int_t^v F(x,s)ds)\rho(x,v)G(x,v)dxdv, \tag{16}$$

которое однозначно разрешимо и его решение неотрицательно так, как ядро и свободный член уравнения положительны. Из этого следует, что и функция (x,t) неотрицательна и однозначно определяется набором Г.

Уравнения (12), (13) и (14) внутри области допустимых управлений решений не имеют так, как левые части их являются положительными функциями. На границе области управления, управляющие функции $\varepsilon(x,t)$, $\eta(x,t,u)$ и $\zeta(s,t,u)$ должны доставлять максимумы положительным интегралам

$$\int_0^T\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \beta(s,t)\eta(x,t,s)dsf(x,z(x,t),t)\rho(x,t)dx\lambda(u,t)\varepsilon(u,t)dudt,$$

$$\int_0^T\int_0^1\int_0^1\int_0^1[\lambda(u,t)\zeta(s,t,u)(1-\beta(s,t))+\beta(u,t)\lambda(s,t)\varepsilon(s,t)]dsf(x,z(x,t),t)\rho(x,t)\eta(x,t,u)dudxdt$$

и $\int_0^T\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \lambda(u,t)\eta(x,t,u)(1-\beta(s,t))\rho(x,t)f(x,z(x,t),t)dx\zeta(s,t,u)dsdudt,$

соответственно. Из неравенства Гёльдера следует, что такие максимумы достигаются при

$$\varepsilon(x,t)=c_\varepsilon\lambda(x,t)\int_0^1\int_0^1 \beta(s,t)\eta(u,t,s)f(u,z(u,t),t)\rho(u,t)duds, \tag{17}$$

$$\eta(x,t,u)=c_\eta\rho(x,t)f(x,z(x,t),t)\int_0^1[\beta(u,t)\lambda(s,t)\varepsilon(s,t)+\lambda(u,t)\zeta(s,t,u)(1-\beta(s,t))]ds \tag{18}$$

и $\zeta(x,t,u)=c_\zeta\int_0^1 \lambda(u,t)\eta(s,t,u)(1-\beta(x,t))\rho(s,t)f(s,z(s,t),t)ds,$ (19)

где c_ε, c_η и c_ζ – постоянные, удовлетворяющие условиям нормировки функций распределения:

$$\int_0^1 \eta(u,t,x)dx=1,\ \int_0^1 \zeta(x,t,u)du\le\zeta_0(x,t)<1,\ \int_0^1 \varepsilon(x,t)dx+\int_0^1 \delta(x,t)dx+\alpha_0(t)=1\,.$$

Уравнение (11), после исключения функций $\varepsilon(x,t)$ и $\zeta(x,t,u)$, приводится к виду:

$$\dot{v}(s,t)\int_0^1 c_\varepsilon\lambda^2(u,t)du\int_0^1 \beta(q,t)\dot{v}(q,t)dq-c_\zeta\int_0^1 \lambda^2(u,t)\dot{v}^2(u,t)du+c_\zeta\beta(s,t))\int_0^1 \lambda^2(u,t)\dot{v}^2(u,t)du=0$$

Единственным решением этого интегрального уравнения является функция

$$\beta(s,t)=1-\frac{\dot v(s,t)c_\varepsilon\int_0^1\lambda^2(u,t)du\int_0^1\dot v(u,t)du}{c_\zeta\int_0^1\lambda^2(u,t)\dot v^2(u,t)du+c_\varepsilon\int_0^1\lambda^2(u,t)du\int_0^1\dot v^2(u,t)du}\equiv \tag{20}$$

$$\equiv 1-K(t)\dot v(s,t),$$

где

$$K(t)=\frac{c_\varepsilon\int_0^1\lambda^2(u,t)du\int_0^1\dot v(u,t)du}{c_\zeta\int_0^1\lambda^2(u,t)\dot v^2(u,t)du+c_\varepsilon\int_0^1\lambda^2(u,t)du\int_0^1\dot v^2(u,t)du}. \tag{21}$$

Из уравнений (18), (19) и (20) следуют решения:

$$\varepsilon(x,t)=c_\varepsilon\lambda(x,t)[\int_0^1\dot v(q,t)dq-K(t)\int_0^1\dot v^2(q,t)dq]; \tag{22}$$

$$\eta(x,t,u)=c_\eta\rho(x,t)f(x,z(x,t),t)\{\int_0^1\lambda^2(s,t)ds[\int_0^1\dot v(q,t)dq-K(t)\int_0^1\dot v^2(q,t)dq]c_\varepsilon(1-K(t)\dot v(u,t))+$$
$$+c_\zeta\lambda^2(u,t)K^2(t)\dot v(u,t)\int_0^1\dot v^2(q,t)dq\}; \tag{23}$$

$$\zeta(x,t,u)=c_\zeta K(t)\dot v(x,t)\lambda(u,t)\dot v(u,t). \tag{24}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если существует экстремальный набор управляющих функций экстремальной задачи (9), то он является решением системы уравнений (15), (17), (18), и (20).

Замечание. Отметим, что из формулы (20):

$$\beta(u,t)=1-K(t)\dot v(u,t),$$

в которой функция $K(t)>0$, а

$$\dot v(u,t)=\int_0^1\eta(r,t,u)\rho(r,t)f(r,z(r,t),t)dr$$

определяет скорость получения прибыли индивидуумом u, следуют:

Вывод 1. Для максимизации ВВП и основных фондов ставка налога должна быть выше у того, кто меньше получает прибыли.

Вывод 2. Виртуальное общество, смоделированное выше, при постановке «благородной» цели максимизации ВВП и основных фондов и при использовании «абсолютного управления» приходит к биоценозу хищников – «в пищу идут слабейшие». ■