УДК 519.86(078)

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ОБЩЕСТВА НА ОСНОВЕ РАСШИРЕННОЙ МОДЕЛИ ХААВЕЛМО

КАТАРГИН Н. В.
кандидат физико-математических наук

БОГОМОЛОВ А. И.
кандидат технических наук

КОСТЮНИН В. И.
кандидат технических наук

МОСКВА (РОССИЯ)

Норвежский математик-экономист, лауреат Нобелевской премии Т. Хаавелмо (Trygve Magnus Haavelmo) изучал системы одновременных уравнений, описывающие экономические процессы. Он предложил систему из двух уравнений, описывающих развитие системы, включающей в себя N людей (население), производящих и потребляющих Y единиц продукции, причём Y отстаёт от N. Прирост населения пропорционален его количеству (модель Мальтуса), но при дефиците продукции происходит убыль населения.

$$\frac{dN}{dt} = aN - b\frac{N^2}{Y},$$

$$Y = AN^c,$$

где N – население; Y – произведённая продукция;
a, b, c, A – коэффициенты.

Нами проведено исследование данной системы уравнений методом конечных разностей в среде Excel. Начальное население $N = 100$, временной интервал $dt = 0,01$ (т. е. все коэффициенты фактически домножены на 100). Далее приведён пример: часть таблицы Excel с формулами и результатами расчетов.

Таблица 1

	A	B	C
1	***N***	***dN***	***Y***
2	100		=***A****A2^***c***
3	A2+B3	(***a****A2-***b****A2^2/C2)****dt***	22,257
4	71,967	-12,165	19,952
5	62,432	-9,534	18,062
6	54,818	-7,613	16,491

Некоторые результаты расчётов представлены в табл. 2 и на рис. 1. Изменённые коэффициенты очерчены рамками. Номера графиков на рис. 1 соответствуют номерам колонок в табл. 2.

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	3	12	20	20	30	50	50	50	50
b	7	7	7	7	7	7	7	7	5
c	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,6	0,5	0,5
A	2	2	2	1	1	1	1	1	1
Асимптота	0,6	60,8	333,6	33,1	128	702	136	51	100

На графиках видно, что решения системы уравнений близки к экспонентам, стремящимся к асимптотам, которые, как показали расчеты, не зависят от начального значения N.

Мы также исследовали расширенную модель Хаавельмо, включив в неё действующих лиц: криминал (K) и власть (V). Криминал забирает себе часть продукции Y, равную rK, размножается со скоростью fK и при дефиците продукции вымирает со скоростью sK^2/Y, т. е. по тому же закону, что и население. Кроме того, количество криминала уменьшает власть

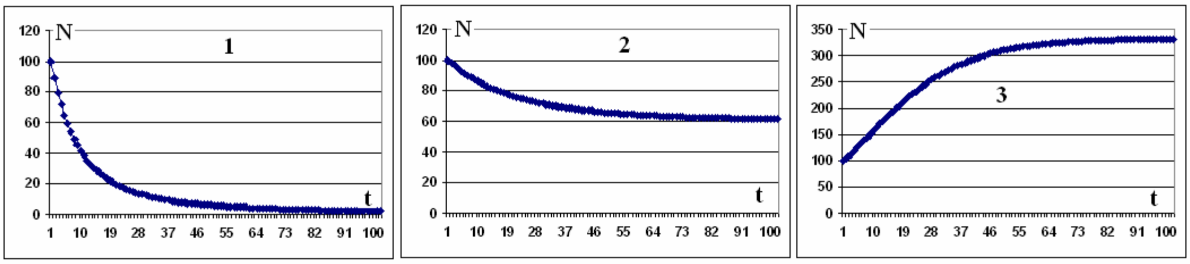

Рис. 1. Динамика популяции в зависимости от параметров системы

с эффективностью e, т. е. на eV за временной интервал. Власть (точнее, расходы на власть) пропорциональна продукции ($= vY$) и уменьшает Y на величину V. Модель принимает вид:

$$\frac{dN}{dt} = aN - b\frac{N^2}{Y},$$
$$Y = AN^c - rK - V,$$
$$\frac{dK}{dt} = fK - s\frac{K^2}{Y} - eV,$$
$$V = vY.$$

Во всех расчетах использованы коэффициенты столбца 6 первой модели и одинаковые коэффициенты: размножения криминала f, убывания криминала s и пропорциональности продукции и власти v:

a	*b*	*c*	*A*	*f*	*s*	*v*
50	7	0,7	1	20	7	0,1

Фрагмент таблицы Excel для расчётов представлен в табл. 3, результаты расчётов – в табл. 4 и на рис. 2.

Таблица 3

	A	B	C	D	E
3	***N***	***dN***	***Y***	***K***	***V***
4	**100**		**24,51**	**3**	**2,45**
5	**121,45**	**21,45**	**25,68**	**3,19**	**2,56**
6	**141,98**	**20,53**	**28,85**	**3,39**	**2,88**

Рассмотрение табл. 4 и рис. 2, а также эксперименты с начальными значениями N и K приводят к следующим выводам:

1. Население и криминал могут испытывать значительные колебания в начальной стадии процесса, но в конечном итоге стремятся к асимптотам, если не произошла катастрофа. Изменение начальных значений N и K не приводит к существенному изменению асимптот.

2. Криминал, присваивающий даже небольшую часть продукции, в перспективе резко сокращает население и производство: при $r = 10\%$ асимптота

Таблица 4

№	6 табл.2	1	2	3	4	5	6
r	**0**	**0,2**	0,33	**0,2**	**0,2**	**0,2**	**0,1**
e	**0**	**2**	**2**	**12**	**15,6705**	**15,67051**	**2**
Асимптота населения	**702**	**127**	**65**	**130**	**131**	**511**	**237**
Асимптота криминала	**0**	**50,7**	**26**	**51**	**51**	**0**	**94,5**

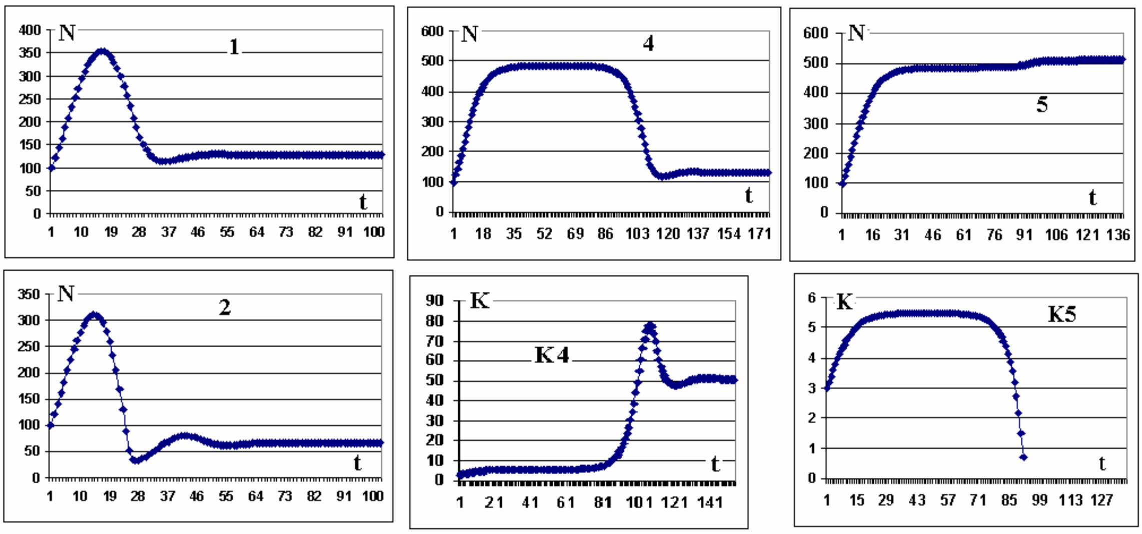

Рис. 2. Динамика популяции и криминала в зависимости от параметров системы

населения падает в 3 раза (сравните № 6 табл. 1 и 4), при $r = 20\%$ в 5 раз (№ 1). При $r = 33\%$ имеют место затухающие колебания населения и криминала, асимптота падает в 10 раз (№ 2); около 40% наступает катастрофа: население падает до нуля.

3. Эффективность власти e не влияет на асимптоты криминала и незначительно (до 15%) влияет на асимптоту населения, однако существуют критические значения коэффициентов e, при которых действия власти могут поддерживать количество населения довольно длительное время на высоком уровне (№ 4), но, в конечном итоге, криминал начинает быстро расти, затем и криминал, и население падают и стабилизируются (рис. 2, графики 4, K4). Критические значения e пропорциональны начальному значению криминала K (расчёты проведены при $K_0 = 3$, а при $K_0 = 20$ $e_{крит.} = 92,5$). При ничтожном превышении критического значения e (сравните № 4 и № 5) криминал через какое-то время полностью истребляется, население и производство стабилизируются на существенно более высоком уровне (рис. 2, № 5 и K5).

Представленная модель должна помочь изучению студентами основ экономико-математического моделирования, если эта дисциплина сохранится в российских вузах. Некорректно, но очень интересно проводить исследования модели при больших значениях коэффициента Мальтуса a (250–370). При этом возникают периодические биения, а потом непериодические, имитирующие динамический хаос, причём иногда в этом хаосе наступают периоды стабилизации населения и производства. ■